解析学 IA 演習 NO.6

問題 6.1. n, m は 0 以上の整数とする。二変数関数 $f(x,y) = x^n y^m$ にたいして、二階偏導関数 $f_{xy}(=(f_x)_y)$, $f_{yx}(=(f_y)_x)$ をそれぞれもとめよ。(但し x^0 は (x が 0 であるかどうかに関係なく) 1 であると本問では約束しておく。)

問題 6.2. 二変数関数 $f(x,y) = \sin(xy^2)$ にたいして、二階偏導関数 $f_{xy}(=(f_x)_y)$, $f_{yx}(=(f_y)_x)$ をそれぞれもとめよ。

問題 6.3 (ペアノの例)**.** (各 1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する。このとき,

(1) f は $(0,0)$ で連続であることを証明しなさい。
(2) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ が、 $b \neq 0$ をみたすとき、$f_x(a,b)$ を求めなさい。
(3) $a \in \mathbb{R}$ について、 $f_x(a,0)$ を求め、つづけて (前問と併せて) $f_x(0,b)$ を全ての $b \in \mathbb{R}$ について求めなさい。
(4) $a \in \mathbb{R}$ について、 $f_y(a,0)$ を求めなさい。
(5) $f_{xy}(0,0)(=(f_x)_y(0,0))$ と $(f_y)_x(0,0)$ とをそれぞれ求め、両者が等しいか確認しなさい。

補題 6.1. *(絶対積分評価)* 閉区間上の *(ベクトル値)* 関数

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

が区分的に連続 *(すなわち、*$[a,b]$ の有限分割が存在してそのそれぞれの区間で連続*)* であるとき、

$$|| \int_a^b g(x)dx|| \leq \int_a^b ||g(x)||dx$$

問題 6.4. (各 1)

(1) 定数関数 $g(x) = v$ に対して上の補題を証明しなさい。
(2) $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ と $a_1 \in [a,b]$ が与えられていて、

$$g(x) = \begin{cases} v_1 & \text{if } x \in [a, a_1] \\ v_2 & \text{if } x \in (a_1, b] \end{cases}$$

で定まるような関数 g に対して、上の補題を証明しなさい。
(3) 一般の区分的に定数であるような関数に対して、上の補題を証明しなさい。

一般の区分的に連続な関数については、上の問題の極限として補題が証明される。以下の問題では、とくに断らない限り、絶対積分評価を用いて良い。

問題 6.5. (各 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(x)=\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix}$$

で定義する。このとき、

(1) $f(x)=f(0)+x\int_0^1 g(tx)dt$ を満たすような g を一つ求めなさい。(以下本問では g といえばこの関数をさす。)
(2) $||f(x)-f(0)||\le|x|$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ について成り立つことを証明しなさい。
(3) $||g(x)-g(0)||\le|x|$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ について成り立つことを証明しなさい。
(4) $g(x)-g(0)=\int_0^1 h(sx)ds$ を満たすような h を一つ求めなさい。
(5) f の 0 での二次近似を求めなさい。すなわち、

$$f(x)=v_0+xv_1+x^2v_2+o(|x^2|)$$

なる $v_0,v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$ を求めなさい。

問題 6.6. (各 1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}e^r\cos(\theta)\\ e^r\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

で定義する。このとき、

(1)

$$f(\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix})+\int_0^1 g(t\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix})dt\cdot\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix}$$

を満たすような 二変数 $M_2(\mathbb{R})$ 値関数 g を一つ求めなさい。

(2)

$$||f(\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix})||\le|\frac{e^r-1}{r}|$$

が任意の $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ について成り立つことを証明しなさい。ただし、$r=0$ のときには 右辺の値は 0 と約束する。

(3) 一階偏導関数 f_r,f_θ をそれぞれ求めよ。
(4) 二階偏導関数 $f_{rr},f_{r\theta},f_{\theta\theta}$ をそれぞれ求めよ。
(5) f の 0 での一次近似を求めなさい。すなわち、

$$f(\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix})=v_0+v_{10}r+v_{01}\theta+o(||\begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix}||)$$

をみたす v_0,v_{10},v_{01} を求めなさい。

(6) f の 0 での二次近似を求めなさい。(その定義は類推するか、講義を参照)