微分積分学概論 AI 要約 NO.2

数列と収束の定義

●定義とは、 言葉の使い方のとりきめのことである。数学では、どのような言葉も、そのような取り決めなしで使われることはない。(ただし、「整数」「有理数」、「和」、「積」などの言葉をきちんと定義するのは手間がかかる。それらについて詳細に定義するのはこの講義では控える。(端的に言えば、整数は帰納法を援用して定義し、有理数は整数の「商」 m/n に適当な「等しいかどうかの判定規則」と定義する。) それらについて詳細に定義するのはこの講義では控える。実数は有理数の極限として定義するのだが、今日はその「極限」の話題である。)

●$\forall$ と $\exists$ とはなにか。

$$\forall x....$$

は、「どんな x に対しても、 .... がなりたつ」という意味。

$$\exists x....$$

は、「なにかある一つの x に対しては、 .... がなりたつ」という意味で用いる。

正の整数の全体のことをこの講義では $\mathbb{Z}_{>0}$ と書く。数列とは、数学的には次のように定義できる。

定義 2.1. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは、 $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことである。

数列が「収束する」ということの厳密な定義をしよう。それには、絶対値を用いる。

定義 2.2.

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(ただし平方根は 0 以上のほうを選ぶ。)

上の平方根を使う定義は次のように高次元の空間にも容易に拡張できるという長所を持つ。

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}$$

次の三角不等式も実は高次元の場合にも成り立つ。

定理 2.3 (三角不等式)**.** 任意の実数 x, y に対して、

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

がなりたつ。

いよいよ収束性の定義を述べよう。

定義 2.4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に**収束する**とは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \forall n \in \mathbb{Z}(n > N \implies |a_n - c| < \epsilon)$$

がなりたつときに言う。

この定義が使いこなせるようになれば、この講義の目標の 80% は達せられたと言って良い。

例題 2.5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 $\{a_n\}$ は何かある値に収束するだろうか。上の定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

解答 . 収束しない。

(証明) 背理法で、$\{a_n\}$ がある数 c に収束したとする。収束の定義の ϵ として $\frac{1}{2}$ を採用しよう。ある N_0 が存在して、

(※) $$n > N_0 \text{ならばいつでも } |a_n - c| < \frac{1}{2}$$

が成り立つはずである。そこで

(sample i) 上の n として N_0 より大なる 10 の倍数、たとえば、$n = 10N_0$ をとると、

$$|1-c| < \frac{1}{2}$$

がわかり、

(sample ii) 上の n として N_0 より大なる数で、10 の倍数でないもの、たとえば、$n = 10N_0+1$ をとると、

$$|0-c| < \frac{1}{2}$$

がわかる。

上の (sample i,ii) をあわせると、

$$1 = |1-0| \le |1-c| + |c-0| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

となって矛盾である。

よって、$\{a_n\}$ はいかなる値にも収束しない。

例題 2.6. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ が 10 の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 a_n は何かある値に収束するだろうか。上の定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

解答． $\underline{\{a_n\} \text{ は 0 に収束する}}$

(証明) 与えられた $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ にたいして、N_0 として、$1/\epsilon$ より大きい整数を一つとっておく。(そのようなもの (すなわち与えられた実数よりも大きな整数) が存在することは、「アルキメデスの原理」として保証されているが、マアさしあたっては当り前だと思っても良い。)

この N_0 が収束の定義の N の役割を果たすことを示そう。実際、 $n > N_0$ なる任意の n にたいして、

(case i) n が 10 の倍数なら、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \epsilon$$

(case ii) n が 10 の倍数でないなら、

$$|a_n - 0| = 0 < \epsilon$$

となって、いずれの場合にせよ $|a_n - 0| < \epsilon$ が成り立つからである。

問題 2.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & n \text{ が 10 の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 $\{a_n\}$ は何かある値に収束するだろうか。上の定義に基づいて理由を述べて答えなさい。