微分積分学概論 AI 要約 NO.4

収束に関する諸定理 (2), 単調増加・減少数列.

定理 4.1. (テキスト "定理 1.4") 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ収束するとする。このとき、

(1) 「極限をとる」という操作は線形である。すなわち、$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ は収束して、

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda(\lim_{n\to\infty}a_n)+\mu(\lim_{n\to\infty}b_n)$$

(2) 「実数の乗法は連続である。」

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)(\lim_{n\to\infty}b_n)$$

(3) 実数の除法は「連続」である。もっと詳しく言うと、$\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$ なら、有限個の例外を除いて $b_n\neq 0$ であって、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)/(\lim_{n\to\infty}b_n).$$

定義 4.2. 実数列 $\{a_n\}$ が**単調増加**であるとは、

$$\forall n\forall m(n\geq m \implies a_n\geq a_m)$$

がなりたつときにいう。

次の定理は、既知の数から未知の数 (e など) を作り出すときに有効である。

定理 4.3. (テキスト "定理 1.5") 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はその上限に収束する。

もちろん、「上」を全て「下」に、「単調増加」を単調減少に置き換えた命題も成り立つ。

問題 4.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$$

で定義する。さらに、$\mathbb{R}$ の部分集合 S を

$$S=\{x;x>0 \text{ かつ } x^2>2\}$$

で定義する。このとき、

(1) 任意の $x\in S$ に対して、$f(x)\in S$ がなりたつことを示しなさい。

(2) 任意の $x\in S$ に対して、

$$f(x)<x$$

が成り立つことを示しなさい。

(3) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=f(a_n)\qquad (n=1,2,3,\dots)$$

で定義すると、この数列はある実数 α に収束することを示しなさい。

(4) 実数 α は $\alpha=f(\alpha)$ を満たすことを示しなさい。

上の数列は大変早く収束する。余力のある人は、電卓や数式処理ソフトなどで、a_n の最初の数項を計算してみると良い。

A	α	alpha	アルファ
B	β	beta	ベータ
Γ	γ	gamma	ガンマ
Δ	δ	delta	デルタ
E	ϵ, ε	epsilon	イプシロン
Z	ζ	zeta	ゼータ
H	η	eta	エータ
Θ	θ, ϑ	theta	シータ
I	ι	iota	イオタ
K	κ	kappa	カッパ
Λ	λ	lambda	ラムダ
M	μ	mu	ミュー
N	ν	nu	ニュー
Ξ	ξ	xi	グザイ
O	o	omicron	オミクロン
Π	π, ϖ	pi	パイ
P	ρ, ϱ	rho	ロー
Σ	σ, ς	sigma	シグマ
T	τ	tau	タウ
Υ	υ	upsilon	ウプシロン
Φ	ϕ, φ	phi	ファイ
X	χ	chi	カイ
Ψ	ψ	psi	プサイ
Ω	ω	omega	オメガ

ギリシャ文字の表。

- 左から順に、大文字、小文字、英語での読み、日本語での読み方を書いた。(ただし、「日本語での読み方」はだいたいの目安に過ぎない。)
- A, B, E など、通常のアルファベットと同じに見える文字は、ふつうは数学では用いられない。
- 逆に、同じ読みでも二つ以上の文字がある場合、数学では二つを区別し、それぞれ別の意味で用いることがある。