微分積分学概論 AI 要約 NO.8

関数の極限値・左極限、右極限。

今回から、関数の話に話題の重点をうつす。

これから、「a の近くで定義されている (実数値) 関数 f 」という言い方をもちいることがある。これは、次の二つの状況を同時に満足していることを言い表す言葉である。

(1) f は $\mathbb{R}$ のある部分集合 S 上定義されている関数 ($f: S \to \mathbb{R}$) である。

(2) S は a を含むある開区間 I を部分集合として含む

定義 8.1 ("1.3.2")**.** f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、x が a に近づくときの $f(x)$ の**極限値** は A である (「$x \to a$ のとき f は A に収束する」とも言う) とは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon)$$

が満たされるときに言う。

($x \to a$ の過程において、「$x = a$ を許さない」というのが一つのポイントである。これは、

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \cos(a)$$

のような不定形の極限を相手にすることが多いからである。)

補題 8.2. 上の定義の状況のもとで、関数 $f(x)$ の x が a に近づくときの極限値は存在するとすれば唯一つである。

定義 8.3. $f(x)$ の $x \to a$ の極限を (それがもし存在すれば、)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

とかく。

定義 8.4 ("1.3.3")**.** f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、x が a に近づくときの $f(x)$ の**右極限値** は A である (「$x \downarrow a$ のとき f は A に収束する」とも言う) とは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (0 < x - a < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon)$$

が満たされるときに言う。f および a が与えられたとき、右極限値がもし存在すれば一意的である。これを

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) \text{ あるいは } \lim_{x \to a+0} f(x)$$

と書く。**左極限値**も同様に定義される。

問題 8.1.

$$\lim_{x \to 2} x^3$$

はいくらか。(結果が正しいことを極限の定義に基づいて証明せよ。)

前回、「アクションプラン」と題して何か喋りましたが、それは、この間のアンケートの結果を踏まえたもので、その要点は:

(1) 講義の最初の 5 分間ぐらいを解説タイムに当てます。
(2) 講義の分からないところ、考え方で良く分からないところなどをレポートに具体的に書いて「これについて解説タイムで解説して欲しい」という風に要望して頂ければできる限りお答えします。
(3) その他、下のような「ツボ」を要約に載せるようにします。

◎ いつになったら

$a_n = \frac{1}{n}$ という数列を考えよう。意訳すれば、コビトサンが一日に一度数字を作ってくれていると考えれば良い。

$$
\begin{aligned}
&1\text{ 日目 } a_1 = 1\\
&2\text{ 日目 } a_2 = 0.5\\
&3\text{ 日目 } a_3 = 0.33333\ldots\\
&4\text{ 日目 } a_4 = 0.25\\
&5\text{ 日目 } a_5 = 0.2\\
&6\text{ 日目 } a_6 = 0.1666\ldots\\
&7\text{ 日目 } a_7 = 0.14285714\ldots
\end{aligned}
$$

いつになったら a_n の値は 0.01 より小さくなるだろうか。

答は 101 日目。

いつになったら a_n の値は 0.001 より小さくなるだろうか。

答は 1001 日目。

いつになったら a_n の値は 0.000234 より小さくなるだろうか。

(ちょっと考えて) 答は 4274 日目。

いちいち聞かれていては面倒だ。記号を用いて自動化しよう。

いつになったら a_n の値は $\epsilon(>0)$ より小さくなるだろうか。

答は $\lceil 1/\epsilon \rceil$ ($1/\epsilon$ より大きい最小の整数) 日目。

同様に、いつになったら

$$\frac{12n^2 + 25n + 2009}{n^2 + 6n + 8}$$

と 12 との差は 0.1 以下になるだろう。

◎「論理的な計算」を理解するために

(a) 表には数、裏にはアルファベットの書かれたカードが 4 枚ある。それらは A, K, 4, 7 であった。それらのカードのことごとくが「母音の裏側の数字は必ず偶数になっている」というルールを満足していることを確かめるためには、最低で何枚のカードをめくる必要があるか。(それらはどのカードか。)

(b)4 人のヒトがいる。

- ビールを飲んでいるヒト (年齢不詳。)
- お茶を飲んでいるヒト (年齢不詳。)
- 何かを飲んでいる 24 歳の青年。
- 何かを飲んでいる 16 歳の生徒。

それらのヒトのことごとくが「20 歳未満はアルコールを飲んではイケナイ」というルールを満足していることを確かめるためには、最低で何人のヒトについて新たな情報を得る必要があるか。(それらはどのヒトか。)

詳細は「偶数」「母音」でネットを検索すると良い。どちらの問題が分かりやすいだろうか。(爆問学問 File-071 より)

◎レポートの解答から

○問題 6.2 では、$\{a_n\}$ が有界であることを証明するのがポイントである。「$\{a_n\}$ が有界として」とか「$\{a_n\}$ が有界と仮定する」で解答が始まるのはのっけからオカシイ。

○ $\{a_n\}$ が c に収束するということを縮めて $\lim_{n\to\infty} a_n$ と書くのである。$\{a_n\}$ は「$\{a_n\}$ が c に収束するので、 $\lim_{n\to\infty} a_n = c$」などと書くのは、全く理解しないという印象を与える。

○収束列が単調とは限らない。 例えば $(-1)^n\frac{1}{n}$ は 0 に収束するし、 $5+(-1)^n\frac{1}{n}$ は 5 に収束する。

○「数列が有界である」とは $\{a_n\}$ 全体が ある区間 $[N, N']$ にすっぽりと入ることを意味している。一つ一つの元が有界であるからといって、全体が有界であるとは限らない。