問題 15.1.

$$f(x) = \frac{5e^{2x} + 3x^2}{7e^{2x} + 2e^x}$$

にたいして、極限

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

を. 考えたい。

(1) α の値を求めなさい。(答のみでよい。)

(2)

$$f(x) - \alpha = \frac{Be^{-x} + Cx^2 e^{-2x}}{49 + Ae^{-x}}$$

を満たす定数 A, B, C を求めなさい。

(3) 適当な正の数 K をとると、$\dfrac{x^2}{e^x}$ は $x > K$ の範囲で有界であることを示しなさい。(分かりにくい場合には、「$x > 10$ ならば $\dfrac{x^2}{e^x} < 100$ であることを示しなさい。」という風に読みかえて解いても良い。)

(4) 正の実数 ϵ に対して、

$$x > M \implies |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

を満たす実数 M を一つ求めなさい。(本小問では理由をきちんと書くことがが大事である。)

結果については理学部二号棟6F 数学掲示板で行なう。採点等の処理は 3 日から一週間程度かかる予定。掲示までは成績についての質問には一切応じられない。

試験解答:

(1) $\alpha = \dfrac{5}{7}$.

(2)

$$f(x) - \alpha = \frac{-10e^{-x} + 21x^2e^{-2x}}{49 + 14e^{-x}}$$

すなわち、$A = 14, B = -10, C = 21$ である。

(3) まず分母の見積もりをしよう。実数 x にたいして、その整数部分 $\lfloor x \rfloor$ のことを n と書くと、$x > 4$ のとき

$$n - 1 = \lfloor x \rfloor - 1 \geq (x-1) - 1 = x - 2 \geq \frac{x}{2}$$

に注意すると、 $x > 4$ のとき、

$$\begin{aligned} e^x &\geq 2^x \geq 2^{\lfloor x \rfloor} = 2^n \\ &\geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} \geq \frac{(x/2)^2}{2!} = \frac{x^2}{8} \end{aligned}$$

がなりたつことが分かる。

そこで、同じ範囲、すなわち $x > 6$ で

$$\left|\frac{x^2}{e^x}\right| = \frac{x^2}{e^x} \leq \frac{x^2}{x^2/8} \leq 8$$

であることがわかる。すなわち $\{x \in \mathbb{R}; x > 4\}$ で $\dfrac{x^2}{e^x}$ は有界である。

(4)

$$M = \max(6, \frac{32}{\epsilon})$$

とおくとよい。実際、任意の $x > M$ にたいして、

$$\begin{aligned} |f(x) - \alpha| =& \frac{|-10e^{-x} + 21x^2e^{-2x}|}{|49 + 14e^{-x}|} \\ \leq& \frac{|10e^{-x}| + |21x^2e^{-2x}|}{|49 + 14e^{-x}|} \quad (\text{三角不等式}) \\ =& \frac{10e^{-x} + 21x^2e^{-2x}}{49 + 14e^{-x}} \leq \frac{10e^{-x} + 21x^2e^{-2x}}{49} = \frac{10 + 21x^2e^{-x}}{49}e^{-x} \\ \leq& \frac{10 + 21 \cdot 8}{49}e^{-x} \quad ((3)\ \text{による}) \\ <& 4e^{-x} \\ <& \frac{4 \cdot 8}{x^2} \qquad (\text{再び}\ (3)\ \text{による}) \\ <& \frac{32}{x} < \epsilon \end{aligned}$$