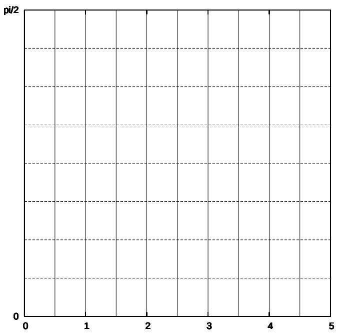
解析学 IA NO.14 要約

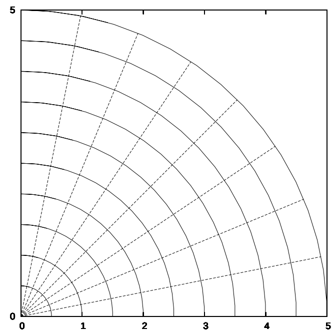
$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 多変数関数の (リーマン) 積分 (5) 変数変換 (つづき)。

変数変換

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

を図示すると、次のよう (左図から右図に変換) になる。





小さな区間長方形 $[r_0, r_0 + dr) \times [\theta_0, \theta_0 + d\theta)$ 上では上の変換はおおむね線形変換

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

で近似され、よってその面積は変換によってほぼ r_0 倍になる。

$$D = \{(x, y); x > 0, y > 0, \sqrt{x^2 + y^2} < R\}$$

上の積分

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

は長方形

$$\tilde{D} = \{(r, \theta); 0 < r < R, 0 < \theta < \pi/2\}$$

上の積分

$$\int_{\tilde{D}} e^{-r^2} r dr d\theta$$

となる。これは容易に (累次積分により) 積分されて答は

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$$

である。このことは一変数の積分にも応用されて、

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を得る。

変数変換の一次近似、Jacobian, 積分の変数変換が一堂に会するこの辺が試験の問題になるであろう。やり方、考え方を良く身につけておくこと。