微分積分学概論 AI 要約 NO.2

第 2 回目の主題 : $\boxed{\text{上限}}$

次の公理は実数の基本的な性質である。

公理 2.1. $\mathbb{R}$ の部分集合 A が上に有界ならば、 A は上限を持つ。

定義 2.2. $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して、その上限のことを $\sup(A)$ と書く。

補題 2.3. 集合 A の上限が α であることは、次の二条件が同時に成り立つことと同値である。

(1) $\forall x \in A \quad (x \leq \alpha)$.
(2) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A (x > \alpha - \epsilon)$.

「$\forall x$....」は、「どんな x に対しても、 .... がなりたつ」という意味、

「$\exists x$....」は、「なにかある一つの x に対しては、 .... がなりたつ」という意味で用いる。

正の整数の全体のことをこの講義では $\mathbb{Z}_{>0}$ と書く。数列とは、数学的には次のように定義できる。

定義 2.4. **実数列** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは、 $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $n \mapsto a_n$ (すなわち、正の整数 n に実数 a_n を対応させる対応) のことである。

数列 $\{a_n\}$ を単なる集合と見てそれが有界かどうか、やその上限 $\{a_n\}$ を議論することができる。公理 2.1 により、上に有界な数列は上限を持つことがわかる。

定義 2.5. 実数列 $\{a_n\}$ が**単調増加**であるとは、

$$\forall n \forall m (n \geq m \implies a_n \geq a_m)$$

がなりたつときにいう。

もっと露骨に言えば $\{a_n\}$ が単調増加であるとは

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots$$

が成り立つということである。

補題 2.6. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

で定義する。このとき

(1) $\{a_n\}$ は単調増加である。
(2) $\{a_n\}$ は有界である。

定義 2.7. 上限

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

のことを**自然対数の底**とよび、e と書く。

問題 2.1. 正の実数 r をひとつ固定したとき、

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} r^k$$

で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示しなさい。

参考のために、$\mathbb{R}$ の性質で必要最小限のものを書いておこう。

よく知っている体 $\mathbb{R}$ から少し離れて、次のような集合 K (とその上の演算 $+, \times$, 元 $1_K, 0_K$, 関係式 $>, =, <$) を考える。

(1) K は体である。すなわち:
  (a) $(K, +)$ は加法群である。
    (i) K の各元 x, y に対して、その和と呼ばれる元 $x + y \in K$ がただひとつ定まる。
    (ii) $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (\forall x, \forall y, \forall z \in K)$.
    (iii) K にはゼロ元 0_K と呼ばれる元が存在して、任意の $x \in K$ に対して $x + 0_K = x, 0_K + x = x$ を満たす。
    (iv) K の各元 x に対して、そのマイナス元 $(-x)$ と呼ばれる元が存在して、 $x + (-x) = 0_K, (-x) + x = 0_K$ を満たす。
    (v) $x + y = y + x$.
  (b) $(K, \times)$ は乗法に関して半群をなす。すなわち、
    (i) K の各元 x, y に対して、その積と呼ばれる元 $xy \in K$ がただひとつ定まる。
    (ii) $x(yz) = (xy)z \qquad (\forall x, \forall y, \forall z \in K)$.
  (c) 分配法則。$(x+y)z = xz+yz, z(x+y) = zx+zy \qquad (\forall x, \forall y, \forall z \in K)$.
  (d) K は乗法に関する単位元 1_K をもつ。すなわち、任意の $x \in K$ に対して $x1_K = x, 1_K x = x$ を満たす。
  (e) K の乗法は可換である。 $xy = yx \quad (\forall x, \forall y \in K)$.
  (f) K の 0_K 以外の元 x は乗法に関して逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、 $x^{-1}x = 1_K, xx^{-1} = 1_K$ を満たす。

(2) K は全順序集合である。
  (a) $x, y \in K$ に対して、 $x > y$ か $x = y$ か $x < y$ のいずれかが成り立つ。
  (b) $x, y, z \in K$ にたいして、「$(x > y$ and $y > z)$ ならば $x > z$」が成り立つ。

(3) K の体の構造と順序構造は両立する。
  (a) $x > y \implies x + z > y + z$.
  (b) $x > 0, y > 0 \implies xy > 0$.

(4) K の任意の有界部分集合は K 内に上限を持つ。

このとき、K は実数体 $\mathbb{R}$ と「同じ」(順序体として同型) である。

群、加法群、体について、その詳しい性質は 2 年生からの代数学で深く勉強する。