微分積分学概論 AI 要約 NO.5

第 5 回目の主題：$\boxed{\text{収束に関する諸定理 (2)}}$

定理 5.1 (再掲). 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ収束するとする。このとき、

(1) 「極限をとる」という操作は線形である。すなわち、$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ は収束して、

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} a_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(2) 「実数の乗法は連続である。」

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(3) 実数の除法は「連続」である。もっと詳しく言うと、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ なら、有限個の例外を除いて $b_n \neq 0$ であって、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

定理 5.2. 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はその上限に収束する。

もちろん、「上」を全て「下」に、「単調増加」を単調減少に置き換えた命題 (下に有界な単調減少数列はその下限に収束する) も成り立つ。

問題 5.1. 正の整数 n に対して、

$$c_n = \max\{k \in \mathbb{Z}; k^2 \leq n\}$$

とおく。(つまり c_n はその二乗が n を超えないような整数のうち最大のものである。) このとき、

(1) c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 を求めよ。(答えのみで良い。)

(2) 定義に基づいて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n} = 0$$

を示しなさい。

(3) さらに、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3c_n + 4}{5c_n + 6}$$

を求めてそれが正しいことを定理 5.1 を用いて証明しなさい。

A	α	alpha	アルファ
B	β	beta	ベータ
Γ	γ	gamma	ガンマ
Δ	δ	delta	デルタ
E	ϵ, ε	epsilon	イプシロン
Z	ζ	zeta	ゼータ
H	η	eta	エータ
Θ	θ, ϑ	theta	シータ
I	ι	iota	イオタ
K	κ	kappa	カッパ
Λ	λ	lambda	ラムダ
M	μ	mu	ミュー
N	ν	nu	ニュー
Ξ	ξ	xi	グザイ
O	o	omicron	オミクロン
Π	π, ϖ	pi	パイ
P	ρ, ϱ	rho	ロー
Σ	σ, ς	sigma	シグマ
T	τ	tau	タウ
Υ	υ	upsilon	ウプシロン
Φ	ϕ, φ	phi	ファイ
X	χ	chi	カイ
Ψ	ψ	psi	プサイ
Ω	ω	omega	オメガ

ギリシャ文字の表。

- 左から順に、大文字、小文字、英語での読み、日本語での読み方を書いた。(ただし、「日本語での読み方」はだいたいの目安に過ぎない。)

- A, B, E など、通常のアルファベットと同じに見える文字は、ふつうは数学では用いられない。

- 逆に、同じ読みでも二つ以上の文字がある場合、数学では二つを区別し、それぞれ別の意味で用いることがある。