

第7回目の主題：**級数**

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、形式的な和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

のことを級数とよぶ。このように形式的に決めたからと言って、その「値」が何もせずには決まるわけではない。上の級数について、

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

で定義される s_n のことをこの級数の部分和と呼ぶ。部分和からできた数列 $\{s_n\}$ が収束するとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_n \right)$$

で定義される数をこの級数の和と呼ぶ。

定義 7.1. 各 a_n が 0 以上の時の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のことを正項級数とよぶ。

有界な単調列は収束することから、次のことが分かる。

命題 7.2. 正項級数は、部分和からなる列が有界ならば必ず収束する。

正項級数に限らない級数については、絶対収束の概念が大事である。

定理 7.3. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば収束する。

定義 7.4. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、絶対収束すると呼ばれる。

「絶対収束する」というのはひとまとまりでひとつの数学用語である。あえて言えば「絶対値の和が収束している」という言葉の省略に近い。「絶対に収束する」という言葉とはまったく異なる。

定理 7.5. 絶対収束する級数は収束する。

例 7.6. 任意の実数 r に対して、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k$$

は収束する。この和を $\exp(r)$ と書く。

級数については二学期以降に詳しく習うので、ここまでにしておく。あとの時間は「数列の収束」の復習および補遺に当てよう。

問題 7.1. (復習)

数列 $\{\frac{1000}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを収束性の定義に従って証明せよ。