

第9回目の主題： 写像

定理 9.1 (再). 集合  $X, Y$  が与えられているとする。  $X$  のおのこの元  $x$  に対して  $Y$  のコピー  $Y_x$  を用意すれば、  $\{Y_x\}_{x \in X}$  はひとつの集合の族である。  $X$  から  $Y$  への写像  $f$  は

$$\prod_{x \in X} Y_x$$

の元  $(f(x))_{x \in X}$  と同一視される。すなわち、直積集合  $\prod_{x \in X} Y_x$  は  $X$  から  $Y$  への写像全体の集合と同一視できる。

定義 9.2 (再).  $X$  から  $Y$  への写像の全体のなす集合を  $Y^X$  と書く。これはまた

$$\text{Hom}_{\text{set}}(X, Y)$$

と書く場合もある。

公理 9.3 (再). 空でない集合ばかりからなる集合族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  にたいして、  $\prod_\lambda X_\lambda$  は空ではない。言い換えると、無限個の空でない集合たち  $X_\lambda$  から、いっせいに一つずつ元を取り出すことが可能である。

◎ 「ホテルヒルベルト」

一般に、  $X$  から  $Y$  への単射が存在することは、  $X$  の元のほうが  $Y$  の元よりも「少ない」ことを意味すると考えられる。  $X$  の各々の元を「人」、  $Y$  の各々の元を「ホテルの部屋」に例えると、単射の存在は一人ひとりが別々の部屋に入れることを意味するからである。ただし、無限集合においては、「多い」「少ない」の感覚は有限集合とは少し異なる。

問題 9.1 (再). つぎのことをそれぞれ示しなさい。

- (1)  $\mathbb{Z}_{>0}^2$  から  $\mathbb{Z}$  への単射が存在する。
- (2)  $\mathbb{Z}^2$  から  $\mathbb{Z}$  への単射が存在する。
- (3) 任意の整数  $n$  にたいして、  $\mathbb{Z}^n$  から  $\mathbb{Z}$  への単射が存在する。
- (4)  $\mathbb{Q}$  から  $\mathbb{Z}$  への単射が存在する。

定理 9.4 (再). 集合  $A, B, C$  に対して、

$$(\#A \leq \#B \text{ and } \#B \leq \#C) \implies \#A \leq \#C$$

がなりたつ。

定理 9.5 (ベルンシュタイン, 再).

$$(\#A \leq \#B \text{ and } \#B \leq \#A) \implies \#A = \#B$$

がなりたつ。

濃度の言葉(とベルンシュタインの定理)を用いると、次のことが分かる

$$\#\mathbb{Z} = \#(\mathbb{Z}_{>0}) = \#\mathbb{Z}^2 = \#\mathbb{Z}^3 = \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Q}^2 = \#\mathbb{Q}^3$$

写像の合成

定義 9.6. 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられているとする。このとき、  $f, g$  の合成写像  $g \circ f: X \rightarrow Z$  を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義する。

**問題 9.2.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられているとする。このとき、次を示しなさい。

- (1)  $f, g$  がともに単射ならば  $g \circ f$  も単射である。
- (2)  $f, g$  がともに全射ならば  $g \circ f$  も全射である。
- (3)  $f, g$  がともに全単射ならば  $g \circ f$  も全単射である。
- (4)  $g \circ f$  が単射ならば、 $f$  は単射である。
- (5)  $g \circ f$  が全射ならば、 $g$  は全射である。

**定義 9.7.** 集合  $X$  に対して、写像  $X \ni x \mapsto x \in X$  を  $X$  の恒等写像といい、 $\text{id}_X$  で表す。

**問題 9.3.**  $X = \mathbb{R}_{\geq 0}, Y = \mathbb{R}$  とおく。写像  $f: X \ni x \mapsto x \in Y$  と  $g: Y \ni x \mapsto |x| \in X$  にたいして、

- (1)  $g \circ f = \text{id}_X$  であることを示しなさい。
- (2)  $f \circ g \neq \text{id}_Y$  であることを示しなさい。
- (3)  $f, g$  はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

**定義 9.8.** 実数  $x$  に対して、 $x$  を超えないような整数のうち最大のものを  $\lfloor x \rfloor$  と書く (floor of  $x$  と読む。)。例えば、

$$\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \quad \lfloor -3.14 \rfloor = -4,$$

である。また、任意の整数  $n$  に対して、 $\lfloor n \rfloor = n$  である。

一般に、実数  $x$  と整数  $n$  に対して、

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$$

にも注意しておこう。昔は  $\lfloor x \rfloor$  のことを  $[x]$  で書いて、「ガウス記号」と呼ぶことが多かったが、今や floor のほうが通りが良くなりつつあるようである。

**問題 9.4.**  $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z}$  とおく。写像  $f: X \ni x \mapsto 2x \in Y$  と  $g: Y \ni x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor \in X$  にたいして、

- (1)  $g \circ f = \text{id}_X$  であることを示しなさい。
- (2)  $f \circ g \neq \text{id}_Y$  であることを示しなさい。
- (3)  $f, g$  はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

**問題 9.5.**  $X = \mathbb{C}[t]$  (複素数係数の  $t$  を変数とする多項式の全体のなす集合),  $Y = \mathbb{C}[t]$  とおく。写像  $f: X \ni p \mapsto \int_0^t p dt \in Y$  と  $g: Y \ni p \mapsto \frac{d}{dt} p \in X$  にたいして、

- (1)  $g \circ f = \text{id}_X$  であることを示しなさい。
- (2)  $f \circ g \neq \text{id}_Y$  であることを示しなさい。
- (3)  $f, g$  はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。