論理と集合要約 NO.16

問題 16.1. 命題 P:$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x < y \implies \exists z \in \mathbb{R}(x < z \text{ and } z < y)))$ について、

(1) P の否定命題を「not を使わずに」書きなさい。(答のみで良い。)

(2) P と not P のうち、真であるのはどちらだろうか。真である方の命題を明記し、それを証明しなさい。

問題 16.2. 写像 $f : \mathbb{Z} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbb{Z}$ について、次の各問に答えよ。それぞれ理由も述べること。

(1) $\overset{-1}{f}(\{0\})$ を求めよ。

(2) $\overset{-1}{f}(\{6, 7, 8, 9, 10\})$ を求めよ。

解答

16.1

(1) P の否定は

$$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x < y \text{ and } \forall z \in \mathbb{R} (x \geq z \text{ or } z \geq y)))$$

である。

(2) P のほうが真である。

[証明] $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}$ を持ってくる。いま、 $x < y$ と仮定すると、

$$z = \frac{x+y}{2}$$

は

$$x < z < y$$

を満たす†。[証明終わり]

(† ここのところは、もう少し詳しく言えば

$$z - x = \frac{y-x}{2} > 0, \quad y - z = \frac{y-x}{2} > 0$$

であるからである。)

16.2

(1)

$$\begin{aligned} \overset{-1}{f}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{Z}; f(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; x^3 - x = 0\} = \{x \in \mathbb{Z}; x(x-1)(x+1) = 0\} \\ &= \{0, 1, -1\}. \end{aligned}$$

(2) $x = -1, 0, 1, 2, 3$ における f の値はそれぞれ

$$0, 0, 0, 6, 24$$

であり、f は $x \leq -1$ においては単調増加であるから、

$$x < -1 \implies f(x) < f(-1) = 0.$$

同様に、f は $x \geq 3$ においても単調増加であるから、

$$x > 3 \implies f(x) > f(3) = 24.$$

ゆえに、$f(x)$ の値が $6, 7, 8, 9, 10$ のいずれかに等しいのは ($x \in \mathbb{Z}$ の条件のもとで) $x = 2$ のときに限る。すなわち、

$$\overset{-1}{f}(\{6, 7, 8, 9, 10\}) = \{2\}$$