代数学 IA 演習問題 NO.3

今日のテーマ 部分群

群の部分群とは、部分集合であって群になっているもののことです。
ただし、部分群の掛け算はもとの群の掛け算と一致しなければなりません。部分群の正確な定義は次のようになります。

定義 3.1 (部分群の定義)**.** 群 (G, m) が与えられているとします。G の部分集合 H が G の部分群であるとは、次の条件を満たすときに言います。
(0) 掛け算 $m: G \times G \to G$ を $H \times H$ に制限すると、これは H に値を持つ。すなわち、次のような写像が誘導される。

$$m : H \times H \to H$$

(1) (H, m) は 群である。

条件 (0) は次のように言い換えても良い。
(0′) h, k を H から任意に取ってくると、いつでも $m(h, k)$ は H の元である。

問題 3.1. 次の集合は整数の加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群をなしますか? 理由をつけて答えなさい。

(1) $(1/2)\mathbb{Z}=\{0, 1/2, -1/2, 1, -1, 3/2, -3/2, \ldots\}$.
(2) $\{\pm 1\}$.
(3) 0 以上の整数の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \}$.
(4) 7 で割って 1 余る整数全体の集合 $7\mathbb{Z} + 1$.
(5) 4 で割り切れる整数全体の集合 $4\mathbb{Z}$.

問題 3.2 (部分群の定義)**.** (各 1 点) 次の集合は有理数全体のなす加法群 $(\mathbb{Q},+)$ の部分群をなしますか? 理由をつけて答えなさい。

(1) $(1/2)\mathbb{Z}=\{0, 1/2, -1/2, 1, -1, 3/2, -3/2, \ldots\}$.
(2) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$.
(3) 7 で割って 1 余る整数全体の集合 $7\mathbb{Z} + 1$.
(4) 0 以外の有理数全体が通常の掛け算についてなす群 $(\mathbb{Q}^\times, \times)$.

問題 3.3. $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群 H が 6 を元として含めば、

(1) 12 も H の元であることを示しなさい。
(2) 108 も H の元であることを示しなさい。
(3) -216 も H の元であることを示しなさい。
(4) 6 の倍数全体 $6\mathbb{Z}$ は H の部分集合であることを示しなさい。

問題 3.4. $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群 H が 200 と 55 を元として含むということを知っていたとします。このとき。

(1) $55 \times 3 (= 165)$ も H の元であることを示しなさい。
(2) $200 - 165 (= 35)$ も H の元であることを示しなさい。
(3) H に確実にはいっているといえる正の整数のうち、最小のものは何ですか？

問題 3.5. 0 以外の有理数のなす乗法群 $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ の部分群 H が 2 を元として含んでいたとします。このとき、「H の正の元のうち最小のもの」は存在しないことを示しなさい。

問題 3.6. 整数全体のなす加法群 $G = (\mathbb{Z}, +)$ を考えます。

(1) 整数 n を一つ決めると、G の部分集合 $n\mathbb{Z}$ が、

$$n\mathbb{Z} = \{nm; m \in \mathbb{Z}\}$$

によって決まりますが、これは G の部分群であることを示しなさい。

(2) 逆に、G の部分群 H は必ず (1) の形で書けることを示しなさい。(ヒント：H の元のうち、正で、最小なものを n としてみなさい。)

問題 3.7. 実数を成分にもつ2次の正則行列の全体は掛け算に関して群をなします。(証明不要) これを普通 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ と書きます。さて、

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

を含む $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群で、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 自身とは異なるものの例を一つあげなさい。

つぎの諸問題は本に載っているかも知れないけれども、それを丸うつしにしても点数は与えません。今回の冒頭に述べた定義3.1から出発して以下のの事実が論理的な飛躍なしに説明できるかどうかがポイントです。

問題 3.8.

(1) H と K が、ともに群 G の部分群であれば、$H \cap K$ も G の部分群となることを示しなさい。

(2) $\mathbb{Z}$ の部分群 H, K で、$H \cup K$ が $\mathbb{Z}$ の部分群にならない例を一つあげなさい。

問題 3.9. $\mathbb{Z}$ の部分群 $H = m\mathbb{Z}$ と $K = n\mathbb{Z}$ との共通部分 $H \cap K$ を求めなさい。

問題 3.10. H が群 G の部分群であれば、G のどの元 t についても、tHt^{-1} は G の部分群となることを示しなさい。

問題 3.11. 群 G の部分群 H, K について、集合 HK も部分群となるための必要十分条件は、$KH = HK$ が成立することである事を示しなさい。