線形代数学概論 A NO.7 要約

行列 は普通の数のように、足したり引いたり掛けたりできるのでした。サイズに気をつけること、積が可環ではないことに注意が必要でした。

....

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 行列のブロック区分け

行列をいくつかのブロックに分けて考えることができる。上手に使えば計算が簡単になる。本日の問題 1 を参照のこと

補題 7.1.

$$A\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & AC \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} PR \\ QR \end{pmatrix}$$

補題 7.2.

$$\begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PR \\ QS \end{pmatrix}$$

命題 7.1.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP+BR & AQ+BS \\ CP+DR & CQ+DS \end{pmatrix}$$

$$F_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◎行列のべき乗、逆行列。

ブロック区分けの威力を知るために、いくつか言葉を用意しておくことにする。「逆行列」についてはあとでもっと組織的に研究することになる。

定義 7.1. 対角成分以外が 0 で有るような正方行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \Large 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

のことを**対角行列**という。

命題 7.2. 対角行列の積は容易に計算できる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \Large 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & & \Large 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & & & \Large 0 \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

とくに、

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \Large 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \Large 0 \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & a_n^k \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

が $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して成り立つ。(一般の行列で同じようなことが成り立つとは思わないように。)

上の命題は、ブロック対角化されたような行列についても拡張される。

命題 7.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

が $k = 1, 2, \ldots,$ にたいして成り立つ。

定義 7.2. n 次正方行列 A に対して、同じサイズの正方行列 B で、

$$AB = E_n \qquad \text{and} \qquad BA = E_n$$

を満たすもののことを、A の逆行列という。

定理 7.4. 正方行列 A の逆行列は**一意的**である。すなわち、A の逆行列は、*(*存在するかどうかはわからないが、*)* 存在するとすれば誰がいつどのように見つけてきたものでもおなじである。

定義 7.3. A の逆行列が存在するとき、その逆行列を A^{-1} と書く。

A の逆行列が存在するとき、$(A^{-1})^2, (A^{-1})^3, (A^{-1})^4, \ldots$ を $A^{-2}, A^{-3}, A^{-4} \ldots$ と書く。(ついでに、$A^0 = E_n$ と書く。) 通常の数と同じように

$$A^{n+m} = A^n A^m$$

が n, m の正負に関わらず成り立つ。$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のどれも 0 ではないならば、(7.1) 式が $k \in \mathbb{Z}$ に対して (すなわち、正でも負でも) なりたつ。 (7.2) 式も $k \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ。

問題が複数あるときにはそのどれか 1 問を解くこと。

問題 7.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく。$A^2, A^3, A^4, \ldots$ を求めよ。

問題 7.2. $A \in M_m(\mathbb{R}), C \in M_n(\mathbb{R}),\ B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする。このとき $P = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,m} & C \end{pmatrix}$ の逆行列を A^{-1}, B, C^{-1} を用いて求めよ。

Hint1: 逆行列を $Q = \begin{pmatrix} X & Y \\ O_{n,m} & Z \end{pmatrix}$ と仮定して、$PQ = E_{n+m} = \begin{pmatrix} E_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix}$ を満たすという条件から X, Y, Z を A, B, C を用いて表わせ。

Hint2: 行列は交換可能ではないことに注意。

Hint3: Q の候補が見つかったからと言って安心してはいけない。必ず PQ と QP を計算してその結果を吟味すること。