線形代数学概論 A NO.11 要約

行列 A の分解 $A = PF_{m,n}(r)Q$ は「どのベクトルを活かすか」、「どのベクトルは潰すか」を決めていると考えることができるのでした。$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の定義域 $\mathbb{R}^n$ のうち、r 個 (の一次独立な) ベクトルが生き残り、残りの $k = n - r$ 個 (の一次独立な) ベクトルが潰れます。(等式 $n = k + r$ は「次元定理」として知られています。)

. . . .

今日のテーマ

正則行列とその逆行列。

命題 11.1. *正方行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が正則であることは A の両側基本変形に関する標準形が E_n であることと同値であり、これはまた A の階数が n (つまり A のサイズ) と等しいこととも同値である。*

命題 11.2. *正方行列 A が正則ならば、それは基本行列のいくつかの (有限個の) 積として書き表せる。*

正方行列 A の逆行列を求めるには、つぎの 3 つの方針がある。

(1) $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ に列基本変形をおこなって、上側が単位行列に等しくなった時の下側を見る。

(2) $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$ に行基本変形をおこなって、左側が単位行列に等しくなった時の右側を見る。

(3) $\begin{pmatrix} A & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ に、上 n 行まで、左 n 列までに限定して。両側基本変形をおこなう。

最後のやり方は少し凝っている。教科書の p.55 表による処理も参照のこと。

逆行列は連立方程式を解くのにも使える。

例 11.1. 連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 34 \end{cases}$$

を解け。

(答)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \end{pmatrix}$$

を満たす x, y を探せばよい。両辺に $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を左からかけて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

◎連立方程式と行基本変形。上の例の方程式を解くには、(高校時代の言葉では)「加減法」を用いれば良いのであった。

ここでは、(教科書に合わせて) 線形方程式の基本変形という言葉を用いることにする。じつは、線形方程式の基本変形は行列の左基本変形 (行基本変形) と対応する.

例 11.1 のように解がひとつだけ決まるような連立方程式は気持ちがいいが、解が複数あったり、ひとつもなかったりするような方程式も扱う必要が生じる。たとえば、ベクトルの一次従属性を判定するためにも必要になるのであった (No.3 参照)。具体的には、ベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

の一次従属性を判定するためには、

$$\begin{cases} c_1 + 3c_3 + 5c_4 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 + 6c_4 = 0 \end{cases}$$

という方程式を解くのであった。

このような方程式についても、基本変形について議論できる。詳しくは次回 (の予定。)

問題 11.1. 以下の 2 つの問に答えなさい。

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。行基本変形、列基本変形のいずれを用いても良いが、求め方も明記すること。

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + 3z + w = 2 \\ x = 3 \\ 3x + y + 2z + w = 4 \end{cases}$$

を前問の逆行列を用いてとけ。