代数学 IA NO.2 要約

群とはインフォーマルに言えば可逆なの集まりであって、それはフォーマルには結合律、単位元、逆元の存在を満たすような集合と演算の組み (定義 1.1) として定義されるのでした。

今日のテーマ 部分群

群の部分群とは、部分集合であって群になっているもののことである。ただし、部分群の掛け算はもとの群の掛け算と一致しなければならない。

部分群の定義に入る前に、群の定義から直ちに導かれる性質についていくつか述べてみよう。以下では G の演算 $m(x,y)$ を単に xy と書くことにする。

定理 2.1. G は群であるとする。このとき、

(1) G の単位元はただ一つである。
(2) G の元 x を一つとってくると、その逆元はただ一つである。*(*これを普通 x^{-1} と書く。*)*
(3) $x \in G$ に対して、$(x^{-1})^{-1} = x$ が成り立つ。
(4) $a, b, c \in G$ が $ab = cb$ を満たすなら、必ず $a = c$ が成り立つ。
(5) 任意の $a, b \in G$ に対して、 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つ。
(6) 任意の $a, b, c, d \in G$ に対して、

$$((ab)c)d = (ab)(cd) = a(b(cd)) = a((bc)d) = (a(bc))d$$

が成り立つ。すなわち 4 つの元のかけ算は a, b, c, d の順番のみに依り、かけ算の順番には依らない。*(*この積のことを普通単に $abcd$ と書く*) (*もっとたくさんの元の積についても同様のことが成り立つ。*)*

定義 2.1 (群の元のべき乗)**.** G を群、 x をその一つの元とする。

(1) 自然数 n に対して、x^n (《x の n-乗》) は帰納的に次のように定義される。

$$x^0 = e \text{ (単位元)},$$
$$x^{n+1} = x^n x$$

(2) n が負の整数のときには、x^n は x^{-n} の逆元として定義する。

定理 2.2. $x^m x^n = x^{m+n}$

さて、本題に入る。部分群の正確な定義は次のようになる。

定義 2.2 (部分群の定義)**.** 群 $(G, \circ)$ が与えられているとする。G の部分集合 H が G の部分群であるとは、次の条件を満たすときに言う。
(部分群 0) 掛け算 $\circ : G \times G \to G$ を $H \times H$ に制限すると、これは H に値を持つ。すなわち、次のような写像が誘導される。

$$\circ : H \times H \to H$$

(部分群 1) $(H, \circ)$ は 群である。

条件 (部分群 0) は次のように言い換えても良い。
(部分群 0′) h, k を H から任意に取ってくると、いつでも $h \circ k$ は H の元である。

例 2.1. 次の集合はそれぞれ $(\mathbb{Z},+)$ の部分群である。

(1) $\mathbb{Z}$ 自身。
(2) $\{0\}$.
(3) 偶数全体の集合 $2\mathbb{Z}$.
(4) 3 の倍数全体の集合 $3\mathbb{Z}$.

次の集合はそれぞれ $(\mathbb{Q}^\times,\times)$ の部分群である。

(1) $\mathbb{Q}^\times$ 自身。
(2) $\{1\}$.
(3) $\{\pm 1\}$.
(4) $\{2^n; n\in\mathbb{Z}\} \quad (=\{1,2,4,8,16,32,\dots\}\cup\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\dots\})$
(5) $\{2^m 3^n; m,n\in\mathbb{Z}\}$

例 2.2. 次の集合はどれも群 $(\mathbb{Z},+)$ の部分群 <u>でない</u>。

(1) 奇数全体の集合 $2\mathbb{Z}+1$.
(2) $\{\pm 1\}$.

定理 2.3. G の部分群 H が与えられたとする。このとき H の単位元は G の単位元と一致し、H の元 h の H での逆元は G での逆元と一致する。

定理 2.4. 群 G の部分集合 H が G の部分群であるためには、次の三条件が満足されることが必要十分である。

(1) $a,b\in H \quad\Longrightarrow\quad ab\in H$
(2) $e\in H$
(3) $a\in H \quad\Longrightarrow\quad a^{-1}\in H$

定理 2.5. *(今回は証明の一部分だけをやる。)* $\mathbb{Z}$ の部分群は必ず

$$n\mathbb{Z} \quad (= n \text{ の倍数の集合}) \qquad (n=0,1,2,3,\dots)$$

のどれかである。*(もちろん、$n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群になっている。)*

※レポート問題
次の中から一問を選んで、レポートとして提出しなさい。
(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) $S=\{1,2,\frac{1}{2}\}$ は実数の乗法群 $(\mathbb{R}^\times,\times)$ の部分集合だが部分群ではないことを示しなさい。