代数学 IA NO.10 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$

次のことは、大変重要であるが、先延ばしにしてきた。

定理 10.1. (重要)*(再)* G を群、H をその部分群とする。G/H に次のような乗法を定めて群にしてやりたい。

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

これが、代表元の取りかたによらずにうまくいって、G/H が実際に群になるためには、H が正規部分群である事が必要十分である。

実際には、「必要十分」のうち、「十分」のほうがよく用いられる。すなわち、

定理 10.2. G を群、N をその正規部分群とする。G/N は上の定理の乗法により群の構造をもつ。。

準同型定理の証明と準同型定理の応用

定理 10.3 (群の準同型定理)**.** 群 G から別の群 H への準同型写像 $\varphi : G \to H$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

(1) φ の像 $\mathrm{Image}\,\varphi$ は H の部分群である。
(2) φ の核 $N = \mathrm{Ker}\,\varphi$ は G の正規部分群である。
(3) 剰余群 G/N は $\mathrm{Image}\,\varphi$ と同型である。

(補足)

第一回の準同型定理のステートメントでは、N は G の部分群であるとだけ述べているが、実際には正規部分群である。

証明の肝:

Step1 φ によるクラス分けは、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ によるクラス分けと一致する。

例 10.1. 位数 $2n$ の二面体群 $\mathbb{D}_n = \langle a, b;\ a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1}\rangle$ から $(\{\pm 1\}, \times)$ への写像 f を、

$$f(a^k b^l) = (-1)^l \quad (k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは全射準同型写像になり、f の核は $\langle a\rangle = \{a^k; k = 0, 1, \dots, n-1\}$ に一致する。ゆえに、$\langle a\rangle$ は $\mathbb{D}_n$ の正規部分群であり、

$$\mathbb{D}_n/\langle a\rangle \cong \{\pm 1\}$$

が成立することがわかる。

レポート問題

(I) (a) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]_8) = [15x]_{20}$ で与えたとき、これがうまく定義されていることを示しなさい。
(b) f が群の準同型であることもを示しなさい。
(c) f の対応表を書いて f によるクラス分けが $\mathrm{Ker}(f)$ によるクラス分けに一致することを確かめなさい。