代数学 IA NO.12 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$
準同型定理の適用例

例 12.1. $\mathbb{Z}$ から $C_n = \langle a; a^n = e \rangle$ への写像 φ を

$$\varphi(k) = a^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

で定義すると、

(1) φ は $(\mathbb{Z}, +)$ から C_n への群準同型である。
(2) $\mathrm{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$.
(3) $\mathrm{Image}(\varphi) = C_n$. (つまり、$\varphi$ は全射。
(4) 群の準同型定理により、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は $\mathbb{Z}$ の部分群であり、なおかつ群としての同型

$$\bar{\varphi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$$

が $\bar{\varphi}([k]_n) = a^k$ で定まる。

例 12.2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}^\times$ への写像 φ を

$$\varphi(x) = e^{\sqrt{-1}x}$$

で定義すると、

(1) φ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{C}^\times, \times)$ への群準同型である。
(2) $\mathrm{Ker}(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$.
(3) $\mathrm{Image}(\varphi) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. (複素平面上の単位円周。)
(4) 群の準同型定理により、$\mathrm{Ker}(\varphi)$ や $\mathrm{Image}(\varphi)$ はそれぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times$ の部分群であり、なおかつ群としての同型

$$\bar{\varphi} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

が

$$\bar{\varphi}(x \mod 2\pi\mathbb{Z}) = e^{\sqrt{-1}x}$$

により定まる。

例 12.3. ベクトル空間 V から W への線形写像 f は、$(V, +)$ から $(W, +)$ への群準同型である。従って、群の準同型定理が適用できて、(加法) 群の同型 $V/\mathrm{Ker}(f) \cong f(V)$ が成り立つことがわかる。じつはこの同型写像は線形空間の準同型定理で言及されているものと写像としては同じである。(線形写像のほうがスカラー倍も考えている分だけ情報が多い。)

レポート問題

(I) $(\mathbb{R}^2, +)$ から $(\mathbb{R}^2, +)$ への写像 f を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義するとき、f は (加法) 群の準同型写像であることを示し、その核と像を求めなさい。

7/17(火) は高知大学的月曜日です。