論理と集合要約 NO.6

第 6 回目の主題：$\boxed{\text{集合の演算の例}}$
$v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ にたいし、そのノルムを

$$||v||=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

で定義する。このとき、$v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ にたいして、

$$||v+w||\leq||v||+||w||$$

がなりたつ。(三角不等式。)
一般に、$a\in\mathbb{R}^n$ と $r>0$ に対して、

$$B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n;||x-a||<r\}$$
$$\bar{B}_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n;||x-a||\leq r\}$$

とおく。
$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U は

$$\forall x\in U\exists r\in\mathbb{R}_{>0}\quad B_r(x)\subset U$$

を満たすとき、(通常位相に関して) **開集合**であると呼ばれる。開集合とは、「境界を含まない集合」ということの数学的な表現である。

開集合というものをベースにして、「遠い」「近い」「つながっている」などの概念を数学的に取り扱えるようにしたものが位相空間論である。位相空間論は現代数学において大変重要な位置を占めていて、進んで数学を学びたい人は、例えば微分積分学の学習と並行して学習してみるのもオススメである。

「境界」という言葉自体も数学的に表現できるが、ここではそこまでは踏み込まないことにする。

問題 6.1. 開球 $B_1(0)$ は開集合であることを示しなさい。

問題 6.2. 閉球 $\bar{B}_1(0)$ は開集合ではないことを示しなさい。

問題 6.3. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\{(x,0);x\in\mathbb{R}\}$ は開集合ではないことを示しなさい。

問題 6.4. 任意の $a,b\in\mathbb{R}^n$ と任意の正の数 r_1,r_2 にたいして、$B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(b)$ は開集合であることを示しなさい。

問題 6.5. 任意の

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{1+1/n}(0)=\bar{B}_1(0)$$

であることを示しなさい。

一般に、開集合の 2 つの共通部分は開集合だが、無限個の共通部分は開集合とは限らない。