線形代数学概論 A NO.3 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ ベクトルの一次独立性 (続)。一次写像。

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_t$ は、その自明でない線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_t\boldsymbol{v}_t \qquad (c_1, c_2, \dots, c_t \in \mathbb{R}, (c_1, c_2, \dots, c_t) \neq (0, 0, \dots, 0)).$$

が $\mathbf{0}$ に等しくなりうるとき、線形従属、そうでないとき、線形独立であるというのでした。線形独立性は、和とスカラー倍という線形代数らしい言葉で語ることができる一方、それは成分で書くと連立一次方程式と関連しているのでした。

. . . .

例 3.1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次従属である。実際、

$$3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$$

だからである。

例 3.2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, v_4$ は一次従属である。実際、

$$3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$$

だからである。(一般に、一次従属なベクトルのあつまりに余分なベクトルを付け加えてもやはり一次従属である。)

上の例で、$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ のあいだの線形関係をカンに頼らずに求めるには、連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_3 + 5c_4 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 + 6c_4 = 0 \end{cases}$$

を解けば良い。

想像がつくように、二次元ベクトル空間 K^2 の 3 個以上のベクトルは必ず一次従属である。このことは、一般のベクトル空間の「次元」を一次独立性を用いて定義できる可能性を示している。実は、ベクトル空間 V が与えられた時、その中で一次独立なベクトルの最大数のことを V の**次元**というのである。

. . . .

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と、ほかのベクトル空間を比べたくなる。あるいは、ベクトル空間同士を比べることもあるだろう。そのために、次のようなものを使う。

定義 3.1. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V, W が与えられているとする。V から W への写像 f が**線形写像**であるとは、次のことが成り立つときにいう。

(線形写像 1) f は和を保つ。すなわち

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) \qquad (\forall v_1 \in V, \forall v_2 \in V)$$

(線形写像 2) f はスカラー倍を保つ。すなわち、

$$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v}) \qquad (\forall v \in V, \forall c \in \mathbb{R})$$

「線形」という言葉の由来は次の命題から分かるかもしれない。

定義 3.2. (若干間に合わせ的)

(1) 体 K 上の線形空間 V の二点 $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を結ぶ**直線**とは、V の部分集合で、
$$\{t\boldsymbol{v}_1 + (1-t)\boldsymbol{w}; t \in K\}$$
なる形をしたものである。

(2) $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V の 2 つの点 $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を結ぶ**線分**とは、V の部分集合で、
$$\{t\boldsymbol{v}_1 + (1-t)\boldsymbol{v}_2; t \in [0,1]\}$$
なる形をしたものである。

この定義では「直線」や「線分」として $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ の場合 (本来は「点」と呼ぶべきもの) を含む。そのほうが下の命題の記述が簡潔になってラクだからだが、使用の場合にはちょっと注意が必要である。

命題 3.1. 線形写像 f について、

(1) f は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ をとおる直線を $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)$ をとおる直線に写す。

(2) 線形写像 f は $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ のあいだの線分を $f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})$ のあいだの線分に写す。

定義 3.3. $\mathbb{R}^n$ のベクトル
$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
($\boldsymbol{e}_i$ は第 i 成分が 1 でその他の成分は 0 であるようなベクトル) のことを**基本ベクトル**と呼ぶ

定理 3.2. $\mathbb{R}^n$ から他のベクトル空間 W への線形写像 f は基本ベクトルの行き先 $\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$ だけを決めれば定まる。

※レポート問題

問題 3.1. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が与えられていて、
$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$
を満足するとする。このとき $f(-\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2)$ を求めなさい。

問題 3.2. (下で、「図」はおおまかなもので良い。更に、適当に顔を落書きしても良い。)

(1) 次の 8 つのベクトルを順に線分で結んで図示しなさい。(最後の $\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}_1$ も結ぶこと。)
$$\boldsymbol{e}_1, \quad 3\boldsymbol{e}_1, \quad 4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad 4\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2,$$
$$3\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, \quad 4\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2$$

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f が与えられていて、
$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$
を満たすとするとき、上の図形を f で写した先の図を書きなさい。