線形代数学概論 A NO.9 要約

行列に基本行列を右から掛けることにより、行列を変形できるのでした。右基本変形を駆使することで、行列の逆行列を計算できます。

....

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 行列の基本変形

$$
\begin{aligned}
&P_n(ij;c) = E_n + cE_{ij} \qquad (i \neq j)\\
&Q_n(i;c) = (E_n \text{ の } i \text{ 列 を } c \text{ 倍した行列}) \qquad (c \neq 0)\\
&R_n(i,j) = (E_n \text{ の } i \text{ 列と } j \text{ 列を入れ替えた行列})
\end{aligned}
$$

◎右基本変形

与えられた行列 A (正方行列と限らない) にたいし、基本行列 (これは正方行列) を右からいくつかかけることにより、A と同じサイズの新しい行列を作ることができる。この操作を**右基本変形**という。

右基本変形は、基本ベクトルの行き先をみることで理解することができる。

命題 9.1 (再)**.** *A を $m \times n$ 行列 (m 行 n 列の行列) とするとき、*

(1) $AP_n(i,j;c)$ は A の i 列の c 倍を A の j 列に加えた行列である。
(2) $AQ_n(i;c)$ は A の j 列を c 倍した行列である。
(3) $AR_n(i,j)$ は A の i 列と j 列を入れ替えた行列である。

というわけで、これらを**列基本変形**とも言う。

例題 9.1. x, y, z はどの 2 つも相異なるような実数とする。このとき、

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}
$$

に基本変形を繰り返して E_3 に変形せよ。(余力があれば、A の逆行列をもとめよ。)

上の命題 9.1 と同様に、次の命題を証明することができる。

命題 9.2. *A を $m \times n$ 行列 (m 行 n 列の行列) とするとき、*

(1) $P_m(i,j;c)A$ は A の i 行の c 倍を A の j 行に加えた行列である。
(2) $Q_m(i;c)A$ は A の i 行を c 倍した行列である。
(3) $R_m(i,j)A$ は A の i 行と j 行を入れ替えた行列である。

*(これらを**行基本変形**という。)*

基本行列を左右どちらからかけたかを選ぶことが、列か、行どちらかを変形するのを選んでいることになる。

ということは覚えておくと良い。

左、右基本変形を繰り返すことにより、行列をより簡単な形にしたい。つぎの方針が考えられる。

(方針 1) 右基本変形のみを繰り返して簡単にする。
(方針 2) 左基本変形のみを繰り返して簡単にする。
(方針 3) どちらもごちゃまぜに使って簡単にする。

<u>どの方針をとっているかを意識することが大事である。</u>

前回は、(方針 1) で考えたのであった。(方針 2) は (方針 1) と似たようなことになる。今回は、(方針 3) で考えてみよう。

定義 9.1. m, n 行列

$$F(r) = F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を、**両側基本変形の標準形の行列**と呼ぶ。

命題 9.3. 任意の m, n 行列 A は、うまく両側基本変形すれば、両側基本変形の標準形の行列に変形できる。

いちいち「両側」と断るのは面倒なので、その内に略すことにするが、今回は念のためつけておくことにする。

例題 9.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を両側基本変形し、標準形に直しなさい。

例題 9.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を両側基本変形し、標準形に直しなさい。

問題 9.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

を両側基本変形し、標準形に直しなさい。