線形代数学概論 A NO.10 要約

行列に基本行列を左右から (ごちゃ混ぜに) 掛けることにより、行列を $F_{m,n}(r)$ と書く行列 ((i,i) 成分がはじめの r 個だけ 1 であとはすべて 0.) に変形できるのでした。

....

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 行列の階数 (ランク)

任意の m,n 行列 A は、うまく両側基本変形すれば、両側基本変形の標準形の行列に変形できるのでした。それを利用すると行列のランクが定義されます。

定義 10.1. 逆行列をもつような行列のことを**可逆行列**とか、**正則行列**と呼ぶ。

命題 10.1. 任意の m,n 行列 A にたいして、正則行列 P,Q と 0 以上の整数 r があって、

$$PAQ = F_{mn}(r)$$

という等式が成り立つ。

定義 10.2. A にたいして、上の命題を満たす r のことを A の**階数**とよび、$\mathrm{rank}(A)$ で書き表す。

命題 10.2. A の階数は、P,Q の選び方によらず、(誰が計算しても) 一意に決まる。

証明には次の補題を用いる。

補題 10.1. m,n 行列 X と n,m 行列 Y とが $XY = E_m$ を満たすとすると、$n \geq m$ でなければならない。

(対偶を取ったほうがわかりやすいかもしれない:)

補題 10.2. $n < m$ ならば、どんな m,n 行列 X とどんな n,m 行列 Y とに対しても、$XY \neq E_m$.

命題 10.2 により、次のことがすぐにわかる。

命題 10.3. m,n 行列 A の階数は、正則行列を右や左からかけても変わらない。

◎階数と正則性

命題 10.4. n 次の正方行列 A について、A が正則であることと、$\mathrm{rank}(A) = n$ であることは同値である。

◎階数の幾何学的な意味

$F_{2,3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ について調べよう。この行列は $A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$ の $\epsilon \to 0$ の「極限」 と考えられる。行列 A_ϵ は,「縦に ϵ 倍、横には等倍」という行列である。の $\epsilon \to 0$ の「極限」 では、この写像は縦方向を完全に潰す。つまり、$\mathbb{F}_{2,2}(r)$ は縦方向を完全に潰す写像である。(論理的には、基本ベクトルの行き先を見たほうがよいが、結論は同じである。)

同様に、$F_{3,3}(2)$ は、

$$F_{3,3}(2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

という線形写像をあたえる。この行列は x,y 方向をそのままに、z 方向を潰すような写像である。

命題 にある分解について考えてみよう。

例 10.1.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

について、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と置くと、P, Q は正則行列であって、

$$A = PF_{2,2}(1)Q$$

という分解が成り立つ。

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

であって、 A は

(1) Q^{-1} の第 1 列 $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ を P の第 1 列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に送る。

(2) Q^{-1} の第 2 列 $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ を 0 に潰す。

ような写像である。

例 10.2. 同様に、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 3 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$

について、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、P, Q は正則行列であって、

$$B = PF_{2,2}(2)Q$$

という分解が成り立つ。

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であって、 B は

(1) Q^{-1} の第 1 列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を P の第 1 列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に送る。

(2) Q^{-1} の第 2 列 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を P の第 2 列 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ に送る。

(3) Q^{-1} の第 3 列 $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 0 に潰す。

ような写像である。

問題 10.1.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} F_{3,2}(2) \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

と、

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} F_{3,2}(1) \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について、それぞれの分解に即してどのベクトルをどのベクトルに送る写像か上の例のように述べよ。