

代数学 II 要約 NO.1

本講義の目的： 加群の理論

本講義では環上の加群の理論について述べる。加群は「イデアル」の一般化であり、環-イデアルの理論を線形に拡張したものが加群の理論であると見ることが出来る。体上の加群はベクトル空間と同じ意味になり、その意味で加群の理論は線形代数学の延長と見ることが出来る。

本講義では扱わないが、現代的には、可換環 R 上の加群はアフィンスキーム $\text{Spec}(R)$ 上の層の加群として扱われ、幾何学的な意義をもつことになる。

第一回目の主題： 環の定義の復習。加群の定義

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

- (1) \mathbb{N} : 0 以上の整数全体のなす集合。
- (2) \mathbb{Z} : 整数全体のなす集合。
- (3) \mathbb{Q} : 有理数全体のなす集合。
- (4) \mathbb{R} : 実数全体のなす集合。
- (5) \mathbb{C} : 複素数全体のなす集合。

上記の \mathbb{R} と、下記の R とは 全く別物 である。区別すること。

定義 1.2. 集合 R が、加法 (“+”) と乗法 (“ \cdot ”) をもち、なおかつ次の性質をもつとき、 R は (単位元をもつ結合的) 環と呼ばれる。

(Ring1) R は加法について加法群をなす。

(Ring2) 分配法則が成り立つ。すなわち、

$$a(b+c) = ab+bc, \quad (a+b)c = ac+bc \quad (\forall a, \forall b, \forall c \in R).$$

(Ring3) R は乗法について結合律を満たす。

(Ring4) R は乗法について単位元をもつ。

この講義では、単に環といえどくに断らない限り上記のように単位元をもつ結合的な環をさすものとする。

環 R にたいし、その加法に関する単位元 (零元) を 0_R , 乗法に関する単位元を 1_R と書く。これらはそれぞれ次の条件を満たす唯一の R の元である。

- $a + 0_R = a, \quad 0_R + a = a \quad \forall a \in R.$
- $a \cdot 1_R = a, \quad 1_R \cdot a = a \quad \forall a \in R.$

混乱の恐れのないときには、 $0_R, 1_R$ の代わりに単に $0, 1$ と書く。

環 R において、積が常に可換である時、 R は可換環と呼ばれる。可換環 R において、0 以外の元が必ず (乗法に関して) 逆元をもつとき、 R は体であると呼ぶ。

例 1.3. 次のものは環である。

- (1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- (2) 可換環 R 上の一変数多項式環 $R[X]$
- (3) 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ にたいし、環 R の元を成分にもつ n 次正方行列の全体 $M_n(R)$.
- (4) 可換環 R をそのイデアル I で割った剰余環 R/I .

例 1.4. 次のものは環ではない。

- (1) \mathbb{N}
- (2) $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{n}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$

定義 1.5. R は環であるとする。加法群 M であつて、次のような条件を満たす「作用」

$$R \times M \ni (r, x) \mapsto r \cdot x \in M$$

が与えられているとき、 M は R -(左)加群であると呼ぶ。

- (Mod1) $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m) \quad (\forall r_1, \forall r_2 \in R, \forall m \in M)$
- (Mod2) $1 \cdot m = m \quad (\forall m \in M)$
- (Mod3) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m \quad (\forall r_1, \forall r_2 \in R, \forall m \in M)$.
- (Mod4) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2 \quad (\forall r \in R, \forall m_1, \forall m_2 \in M)$.

例 1.6. (加群の例)

- (1) 任意の加群 M は \mathbb{Z} -加群と見ることができる。とくに、 \mathbb{Z} 自身や、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ などは \mathbb{Z} 加群である。
- (2) 体上の加群とは体上のベクトル空間のことと同じである。

* 加群としての M の自己準同型の全体

$$\text{End}_{\text{module}}(M)$$

は環をなし、 R の M への作用は R から $\text{End}_{\text{module}}(M)$ への環準同型と同一視される。そのように考えると加群の定義がどうして上のようになるべきかが納得されるだろう。

例題 1.7. 加群 \mathbb{Z} は体 \mathbb{Q} 上の加群になり得ないことを示しなさい。