論理と集合要約 NO.5

第5回目の主題：$\boxed{\text{集合の和集合や共通部分 (2)、直積集合}}$

論理と集合は裏腹の関係にあり、集合の包含関係 (含む、含まれるの関係) は対応する論理で証明するのが良いのでした。

……………………………………………………………………………………

問題 5.1. $2\mathbb{Z} \subset 5\mathbb{Z}$ だろうか。

問題 5.2. $2\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$ だろうか。

◎直積集合

一般に, 元 x と 元 y を順序をつけて並べたもの (x, y) を x, y のペア (組) と呼ぶ。x, y が実数の場合には開区間と全く同じ記号になってしまっていて、紛らわしいのだが、区別するときには「区間 (x, y)」,「ペア (組) (x, y)」と前につけると良いだろう。

定義 5.1. 集合 X, Y に対して、X の元と Y の元のペアの全体の集合

$$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の**直積集合**といい、 $X \times Y$ で書き表す。

もっと一般に、集合族 $\{X_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$ に対して、

$$\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}; x_\lambda \in X_\lambda\}$$

を $\{X_\lambda\}$ の**直積集合**といい、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で書き表す。

直積集合は「積の集合」では<u>ない</u>。そのことを強調するため、直積集合のことを「デカルト積集合」とか「集合としての直積」と呼ぶこともある。

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^3$ 等と略記する。

$\mathbb{R}^n$ が出てきたついでに、それを扱う際に基本になる「開集合、閉集合」について説明しておこう。

以下では絶対値の性質を用いる。高校でよく出てくる性質の他、大切なのは

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

という性質であろう。この不等式は**三角不等式**と呼ばれる。

問題 5.3. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$, $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ とおくとき、$D_1 \subset B_1$ だろうか。

問題 5.4. $D_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1/2\}$, $B_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1/4\}$ とおくとき、$D_{1/2} \subset B_{1/2}$ だろうか。

問題 5.5. 正の実数 r に対して、$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < r\}$, $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < r^2\}$ とおくとき、$D_r \subset B_r$ だろうか。

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ にたいし、その**ノルム** (ユークリッドノルム) を

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

で定義する。このとき、$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ にたいして、

$$||v + w|| \le ||v|| + ||w||$$

がなりたつ。(三角不等式。) このことの証明は内積の定義と性質を用いたほうが良いのでここでは省く。興味のある人は線形代数の教科書を見てみること。

一般に、$a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x - a|| < r\}$$

(a を中心とする半径 r のボール。) とおく。

問題 5.6. $v \in \mathbb{R}^n$ のノルムを R とおくと、

$$B_r(v) \subset B_{(R+r)}(0)$$

が成り立つことを証明せよ。

一般に、$a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、a を中心とした半径 r の開球体を

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x - a|| < r\}$$

で、また、閉球体を

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x - a|| \leq r\}$$

でそれぞれ定義する。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U は

$$\forall x \in U \exists r \in \mathbb{R}_{>0} \quad B_r(x) \subset U$$

を満たすとき、(通常位相に関して) **開集合**であると呼ばれる。開集合とは、「境界を含まない集合」ということの数学的な表現である。

開集合というものをベースにして、「遠い」「近い」「つながっている」などの概念を数学的に取り扱えるようにしたものが位相空間論である。位相空間論は現代数学において大変重要な位置を占めていて、進んで数学を学びたい人は、例えば微分積分学の学習と並行して学習してみるのもオススメである。

「境界」という言葉自体も数学的に表現できるが、ここではそこまでは踏み込まないことにする。

問題 5.7. 開球 $B_1(0)$ は開集合であることを示しなさい。

問題 5.8. 閉球 $\bar{B}_1(0)$ は開集合ではないことを示しなさい。

問題 5.9. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ は開集合ではないことを示しなさい。

問題 5.10. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^n$ と任意の正の数 r_1, r_2 にたいして、$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(b)$ は開集合であることを示しなさい。

問題 5.11. 任意の

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+1/n}(0) = \bar{B}_1(0)$$

であることを示しなさい。

一般に、開集合の 2 つの共通部分は開集合だが、無限個の共通部分は開集合とは限らない。

今回は、「ノルム」として標準的なもの (ユークリッドノルム) を用いたが、それ以外の「ノルム」に関しても $\mathbb{R}^n$ の位相が定義され、じつは結局それらは一致する。つまり、与えられた集合が開集合かどうかはどのノルムで考えても、変わらない。このことは、開集合という概念がノルムより基本にあることを意味している。