ベルンシュタインの定理の証明

定理 0.1 (Bernstein)**.** $g : A \to A$ が単射ならば、 $g(A) \subset B \subset A$ を満たす任意の B に対し、 A と B の間の全単射 f が存在する。

1. 比喩的表現を用いた証明。

A を「妖精国」のように考える。A の元を (妖精だが)「人」と呼び $g(x) = y$ のとき、y は x の子であると言うことにする。x は y の親であるという表現も使う。

g が写像であることは、つぎのように翻訳される

(妖精 1) A の任意の人は子をただひとり必ずもつ。

g が単射であることは、つぎのように翻訳される。

(妖精 2) A の各人の親は、いるとすればただ一人である。

妖精と言うより、ナメック星人のイメージだな。

x の子や、子の子、その子、... を x の子孫と呼ぶ。

x の親や、親の親、その親、... を x の先祖と呼ぶ。

x の先祖と、子孫を合わせたものを x の親戚と呼ぼう。

妖精たちには、へそを持つものとないものがおり、へそを持つ妖精の全体の集合が B であると考えよう。仮定により,

(妖精 3) 親を持つ人は へそを持つ。

毎年正月になると、妖精国 A の各人は「お守り」を作り、次の要領で A の人にわたす。

(正月 1) 「お守り」をつくるのは、妖精国 A の人全員である。
(正月 2) 各人が、へそのある人一人に「お守り」を渡す。
(正月 3) 渡す相手は (自分がへそを持てば) 自分自身でも良い。
(正月 4) へそのある人は全員「お守り」を受け取るようにする。
(正月 5) 「お守り」を 2 つ以上受け取る人はいてはいけない。

(妖精 1) から (妖精 3) までをみたすという仮定のみから、このような渡しかたが実際に存在すると言えるか否か、それが問題である。x に対して、渡す相手を $f(x)$ と置けば、f は A と B の間の全単射を与えることになるからである。

(答) (といってもこれがただひとつの解というわけではない。)

妖精国 A の各人 x は、次のように行動すれば良い。

(1) x の先祖はすべて親を持つ場合。

x の親戚はすべてへそを持つ。そこでその一族の皆は (もちろん x も) それぞれ自分自身に「お守り」を渡す。

(2) x の先祖の中で、親を持たないものが一つでもある場合。

そのものを x の一族の最長老とよぶことにする。

x の親戚はその最長老の子孫の全体と一致する。最長老自身はへそを持つことも持たないこともある。

(a) x の一族の最長老がへそを持つ場合。

x を含めてその一族の皆はやはりそれぞれ自分自身に「お守り」を渡す。

(b) x の一族の最長老がへそを持たない場合。

x を含めてその一族のみなはそれぞれ自分の子に「お守り」を渡す。

*この場合最長老はへそがないから自分で自分にお守りを渡すことができない。そこで最長老は自分の子にお守りを渡し、以下順繰りに代々自分の子供にお守りを渡すことにするのである。

2. 形式ばった証明

以下、小さい字で妖精国での対応物を書く。

定義 2.1. $\prec$ が集合 S 上の**前順序**であるとは、次の二条件が成り立つときに言う。

(1) $\forall x \in S \quad (x \prec x)$
(2) $\forall x, y, z \in S \quad (x \prec y \text{ and } y \prec z \implies x \prec z)$

A には、次のような前順序関係が入る。

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N} \quad g^n(x) = y)$$

$x \prec y$ とは、 y が x の子孫であるということである

A に同値関係 $\sim$ が、

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x \prec y \text{ or } y \prec x)$$

で定義される。

$x \sim y$ とは、 y が x の親戚であるということである

同値関係により、A がクラス分けされる。各クラスは「親族」である

クラス A_λ ごとに A から B への写像 f とその逆写像 G を組み立てよう。 2 つのケースに分かれる。

Case I: A_λ に最小元がない場合。

このばあい、 $A_\lambda = g(A_\lambda) \subset B$ である。

$$f|_{A_\lambda} = \mathrm{id}, \quad G|_{A_\lambda} = \mathrm{id}.$$

と取れば良い。

Case II. A_λ に最小元がある場合。

その最小元を x_λ とおこう。

$g^n(x_\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ は互いに相異なる。

すなわち、 $(A_\lambda, g) \cong (\mathbb{N}, +1)$ なのである。

$B \supset g(A)$ だったから、$g^n(x_\lambda) \in B$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

$x_\lambda \in B$ か否かによってふたとおりに場合分けされる。

Case II-1). $x_\lambda \in B$ のとき。

$B \supset A_\lambda$ である。

従って、Case I と同じく

$$f|_{A_\lambda} = \mathrm{id}, \quad G|_{A_\lambda} = \mathrm{id}.$$

と取れば良い。

Case II-2). $x_\lambda \notin B$ のとき。

このときのみ、A_λ と $A_\lambda \cap B$ の間に違いが生じる。A_λ と $A_\lambda \cap B$ との全単射を与えるには、一つずらせば良い。

$$g : A_\lambda \mapsto (A_\lambda \cap B)$$

は全単射であって、その逆写像を h_λ と書けば、

$$f|_{A_\lambda} = g, \qquad G|_{A_\lambda} = h_\lambda.$$

と取れば良い。

上の証明はクラス分けの際に選択公理を使っている。実際には、選択公理を使わなくても済むので、これは少し「弱み」と言えるかもしれない。

選択公理を使わずに証明するには、次のように考える。

$X = A \setminus B$ とおく。

X は へそのない最長老たちの全体の集合にあたる。

$$W = A \setminus (\bigcup_{j=0}^{\infty} g^j X)$$

とおけば、

$$g : \bigcup_{j=0}^{\infty} g^j X \to \bigcup_{j=1}^{\infty} g^j X$$

は全単射である。

次のことは容易に分かる。

$$A = \bigcup_{j=0}^{\infty} g^j X \cup W$$

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} g^j X \cup W$$

よって、A と B の間の全単射が存在する。

このラインが、本講義の教科書 (小林、逸見著、「集合と位相空間の基礎、基本」) にある証明である。記号もなるべくあわせてある。詳細は教科書を参照のこと。

3. 注釈

妖精国の話は、少し無理矢理なところがあるので、よく考えるとうまくない部分もある。(証明が不完全というわけではなく、話としてわかりやすいか否かの問題。)

(1) A の人には、その子孫がすべて A にいることになっている。現実には、人間だったらせいぜいひ孫までが限界だし、そうでなくても無限に続く子孫が全員いるのは想像しにくいかもしれない。
(2) 「先祖」が同時に「子孫」でもあるような場合もある。それどころか、極端な場合、親が子でもあったり、自分自身が子である事もある。

(ま、妖精ですから...)