論理と集合要約 NO.3

第 3 回目の主題：$\boxed{\text{命題の否定と集合の補集合}}$
◎ and, or の否定

問題 3.1. not (P and Q) と (not P) or (not Q) とが同値であることを真理表を用いて示しなさい。

◎ $P \implies Q$ の否定
$P \implies Q$ は (not P) or Q と同値であったので、その否定は P and (not Q) で与えられる。
◎ $\forall, \exists$ の否定
「すべての X の元 x について $P(x)$ が成り立つ」、すなわち

$$\forall x \in X \ (P(x))$$

の否定は「ある X の元 x について $P(x)$ が成り立たない」、すなわち

$$\exists x \in X \ (\text{ not } P(x))$$

である。
同様に、

$$\exists x \in X \ (P(x))$$

の否定は

$$\forall x \in X \ (\text{ not } P(x))$$

である。
実際の場面では、上の $x \in X$ のように x の制限を「集合の元か否か」で書くとは限らず、そのまま条件で書くことも多い。以下の例を参照のこと。

例 3.1.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \ (|x-3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \epsilon)$$

($x \mapsto x^2$ が $x = 3$ で連続であるという命題 (真)) の否定は

$$(\bigstar) \qquad \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \ (\text{ not } (|x-3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \epsilon))$$

($x \mapsto x^2$ が $x = 3$ で連続でないという命題 (偽)) である。このように、$\forall$ や $\exists$ が散在する命題の否定は、

- 順序はそのままに、
- $\forall$ と $\exists$ を入れ替え、
- 最後の結論を否定する。

という手続きで得られる。
さらに、命題 ($\bigstar$) は、(「P $\implies$ Q」の否定が「 P and(not Q)」であったことから、)

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} \ (|x-3| < \delta \text{ and } |x^2 - 9| \geq \epsilon)$$

と書き換えられる。

問題 3.2. つぎの各々の命題の否定をそれぞれ述べなさい。
(1) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ (x + y = 0)$
(2) $\forall x \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ (xy \neq z)$

集合 X と S が与えられたとき、

$$X \setminus S = \{x; x \in X \text{ and } x \notin S\}$$

を X と S の**差集合**という。($X - S$ と書く流儀もあり、本講義の教科書ではそう書いてある。)
とくに、S が X の部分集合の時、$X \setminus S$ を X における**補集合** とよぶ。 X が分かりきっているときには $\complement S$ と書くこともある。

問題 3.3. 集合 X の部分集合 A, B が与えられたとする。このとき、X を全体集合として考えて

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

が成り立つことを示しなさい。