論理と集合要約 NO.9

写像を理解するときに、「ホテルヒルベルト」のような解釈もできるのでした。
この解釈では、全射は、「空き室がないこと」に対応し、単射は、「各部屋個室」(単射でないことは、相部屋が生じること) に対応するのでした。
全射や単射の存在は、始集合と終集合の元の多さと関係しているのでした。

....

第 9 回目の主題：$\boxed{\text{写像}}$

次のことは少し難しいが数学の上級コースに向かうためには必要になる。

定理 9.1. 集合 X, Y が与えられているとする。X のおのおのの元 x に対して Y のコピー Y_x を用意すれば、$\{Y_x\}_{x\in X}$ はひとつの集合の族である。X から Y への写像 f は

$$\prod_{x\in X} Y_x$$

の元 $(f(x))_{x\in X}$ と同一視される。すなわち、直積集合 $\prod_{x\in X} Y_x$ は X から Y への写像全体の集合と同一視できる。

定義 9.2. X から Y への写像の全体のなす集合を Y^X と書く。これはまた

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(X, Y)$$

と書く場合もある。

次のことは一見当たり前に見える。しかし、じつは集合論の「無限」に関する処理の要である。

公理 9.3. (選択公理) 空でない集合ばかりからなる集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ にたいして、$\prod_\lambda X_\lambda$ は空ではない。言い換えると、無限個の空でない集合たち X_λ から、いっせいに一つづつ元を取り出すことが可能である。

◎写像の合成

定義 9.4. 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられているとする。このとき、f, g の合成写像 $g\circ f : X \to Z$ を

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義する。

次の命題は簡単ではあるが有用である。実用上はこのような命題があることだけ記憶しておいて、その都度頭の中で確かめるのがいいだろう。

命題 9.5. 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられているとする。このとき、次がなりたつ。

(1) f, g がともに単射ならば $g\circ f$ も単射である。
(2) f, g がともに全射ならば $g\circ f$ も全射である。
(3) f, g がともに全単射ならば $g\circ f$ も全単射である。
(4) $g\circ f$ が単射ならば、 f は単射である。
(5) $g\circ f$ が全射ならば、 g は全射である。

定義 9.6. 集合 X に対して、写像 $X \ni x \mapsto x \in X$ を X の**恒等写像**といい、id_X で表す。

命題 9.7. 集合 X, Y と、写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to X$ が与えられているとする。このとき次のことはすべて同値である。

(1) f は全単射であって、g は f の逆写像である。
(2) $g\circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f\circ g = \mathrm{id}_Y$.
(3) f は全射であって、$g\circ f = \mathrm{id}_X$.
(4) f は単射であって、$f\circ g = \mathrm{id}_Y$.

上の命題も、(1)⇔(2) 以外はその都度確認すれば良い。(1)⇔(2) は特に重要である。

問題 9.1. $X=\mathbb{R}_{\geq 0}, Y=\mathbb{R}$ とおく。写像 $f: X \ni x \to x \in Y$ と $g: Y \ni x \to |x| \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f=\mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

定義 9.8. 実数 x に対して、x を超えないような整数のうち最大のものを $\lfloor x \rfloor$ と書く (floor of x と読む。)。例えば、

$$\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \quad \lfloor -3.14 \rfloor = -4,$$

である。また、任意の整数 n に対して、$\lfloor n \rfloor = n$ である。

一般に、実数 x と整数 n に対して、

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$$

にも注意しておこう。昔は $\lfloor x \rfloor$ のことを $[x]$ で書いて、「ガウス記号」と呼ぶことが多かったが、今や floor のほうが通りが良くなりつつあるようである。

問題 9.2. $X=\mathbb{Z}, Y=\mathbb{Z}$ とおく。写像 $f: X \ni x \to 2x \in Y$ と $g: Y \ni x \to \lfloor x/2 \rfloor \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f=\mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

問題 9.3. $X=\mathbb{C}[t]$ (複素数係数の t を変数とする多項式の全体のなす集合), $Y=\mathbb{C}[t]$ とおく。写像 $f: X \ni p \to \int_0^t p dt \in Y$ と $g: Y \ni p \mapsto \frac{d}{dt} p \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f=\mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。