

## 論理と集合要約 NO.12

第12回目の主題： 写像は定義域の元を分類する。

一般に、写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられると、 $X$  の元は  $f$  の値によってクラス分けされる。

**命題 12.1.**  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとし、 $y \in Y$  に対して、 $f^{-1}(\{y\})$  のことを  $X_y$  と書くことにすると、次のことが成り立つ。

- (1)  $X$  は  $\{X_y\}_{y \in Y}$  の和集合である。
- (2)  $y \in Y$  に対して、 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in f(Y)$ .
- (3)  $X_y \cap X_{y'} \neq \emptyset \Leftrightarrow (y = y' \text{ and } y \in f(Y))$ .

$X_y$  のなかで、空集合を省くことにより、 $X$  の下の意味でのクラス分けを作ることができる。

**定義 12.2.** 集合  $X$  の部分集合の族  $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が  $X$  のクラス分け (分割とも言う) であるとは、つぎのことが成り立つときに言う。

- (1)  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X$ .
- (2)  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ならば  $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \emptyset$ .

クラス分け、班分け、分類、分別、等々ほほ同じ意味だが、ここでは主に「クラス分け」という言葉を使う。

**命題 12.3.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられたとき、 $f$  は  $X$  のクラス分けを与える。

**問題 12.1.**  $X = \{1, 2, 3, \dots, 31\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ ,  $f: X \rightarrow Y$  を  $f(x) = (x \text{ を } 7 \text{ で割った余り})$  で定義する。

- (1)  $f$  は全射だろうか。単射だろうか。
- (2)  $X$  の  $f$  に関するクラス分けの表を書きなさい。

**問題 12.2.**  $f: X = \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R} = Y$  に対して、 $f$  によるクラス分けを考える。

- (1)  $(1, 0)$  と  $(1, 5)$  とは同じクラスに入ることを示しなさい。
- (2)  $(1, 0)$  と  $(2, 5)$  とは同じクラスでないことを示しなさい。
- (3)  $(1, 0)$  と同じクラスになるような  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  をすべて求めなさい。
- (4)  $X_0, X_2, X_{-1}$  を求めなさい。

**問題 12.3.**  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 10^2\}$ ,  $Y = \mathbb{R}$  とおく。 $f: X \ni (x, y) \mapsto x \in Y$  に対して、 $f$  によるクラス分けを考える。

- (1)  $f$  は全射だろうか。単射だろうか。
- (2)  $(1, 0)$  と  $(1, 5)$  とは同じクラスに入ることを示しなさい。
- (3)  $(1, 0)$  と  $(2, 5)$  とは同じクラスでないことを示しなさい。
- (4)  $(1, 0)$  と同じクラスになるような  $(a, b) \in X$  をすべて求めなさい。
- (5)  $X_0, X_2, X_{-1}$  を図示しなさい。
- (6)  $X_{20}$  を求めなさい。

**問題 12.4.**  $f: X = \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R} = Y$  に対して、

- (1)  $(1, 0)$  と  $(0, -1)$  とは同じクラスであることを示しなさい。
- (2)  $(1, 0)$  と  $(2, 5)$  とは違うクラスであることを示しなさい。
- (3)  $(1, 0)$  と同じクラスになるような  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  をすべて求め、図示しなさい。
- (4)  $X_2, X_0$  を求めなさい。