

第 14 回目の主題：「代表元のとり方によらない」

問題 14.1.  $\mathbb{Z}$  における二項関係を  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 6\mathbb{Z}$  で定義する。このとき、

- (1)  $\sim$  は同値関係であることを示しなさい。
- (2) 以下この問題では、 $x \in \mathbb{Z}$  の  $\sim$  に関するクラスを  $[x]$  と書く。1 のクラス  $[1]$  に属する  $\mathbb{Z}$  の元をすべて答えなさい。
- (3)  $\mathbb{Z}/\sim$  から  $\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を、 $f([x]) = (x \text{ を } 3 \text{ で割った余り})$  で定義できるだろうか。
- (4)  $\mathbb{Z}/\sim$  から  $\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を、 $f([x]) = (x \text{ を } 4 \text{ で割った余り})$  で定義できるだろうか。

上の問題の (3) のような状況は、「写像  $f$  は代表元のとり方によらずにうまく定義される」と呼ばれてとくに重宝される。

問題 14.2.  $\mathbb{Z}$  における二項関係を  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 12\mathbb{Z}$  で定義する。このとき、

- (1)  $\sim$  は同値関係であることを示しなさい。
- (2) 以下この問題では、 $x \in \mathbb{Z}$  の  $\sim$  に関するクラスを  $[x]$  と書く。3 のクラス  $[3]$  に属する  $\mathbb{Z}$  の元をすべて答えなさい。
- (3)  $\mathbb{Z}/\sim$  から  $\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を、 $f([x]) = (x \text{ を } 5 \text{ で割った余り})$  で定義できるだろうか。
- (4)  $\mathbb{Z}/\sim$  から  $\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を、 $f([x]) = (x \text{ を } 4 \text{ で割った余り})$  で定義できるだろうか。

つぎのことは集合の準同型定理とも呼ばれ、線形代数学、代数学などの各分野で基本的な役割を果たす。

命題 14.1. 写像  $f : X \rightarrow Y$  が与えられた時、

- (1)  $X$  に同値関係  $\sim_f$  が、

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

により定義される。

- (2)  $\bar{f} : (X/\sim_f) \rightarrow Y$  が

$$\bar{f}([x]_f) = f(x)$$

によりうまく定義される。ここに、 $[x]_f$  は  $\sim_f$  に関する  $x \in X$  のクラスである。

- (3)  $\bar{f}$  は  $X/\sim_f$  と  $\text{Image } f$  との間の全単射を与える。
- (4)  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  を自然な射影とすると、 $f$  は全射と単射の合成写像として分解される。すなわち、

$$f = \bar{f} \circ \pi.$$