代数学演習 IB 問題 NO.2

環の定義・部分環の定義

注意 これからは、とくにことわらない限り、単位元をもつ環のみを扱う。「環」といえば、単位元を持つ環と解釈していただきたい。(単位元の存在がとくに重要な時には、一応ことわる。) ただし、積が可換であるとはまだ仮定しない。

問題 2.1. 単位元 1 を持つ環 R の元 x, y, z にたいして、

$$xy = 1 \quad (\text{すなわち } y \text{ は } x \text{ の右逆元である。})$$
$$zx = 1 \quad (\text{すなわち } z \text{ は } x \text{ の左逆元である。})$$

が成り立つとき、$z = y$ であって、

$$xy = yx = 1 \quad (\text{すなわち } y(=z) \text{ は } x \text{ の逆元である})$$

が成り立つことを示しなさい。

定義 2.1. 単位元の存在する環 R において、R のなかで逆元が存在するような元のことを、R の**可逆元**とか、**単元**、あるいは**単数**といいます。

定義 2.2 (部分環の定義)**.** R が単位元をもつ環であるとする。R の部分集合 S が R の部分環であるとは、S が次の条件を満たす時にいう。

(1) S は R の足し算、かけ算を流用することにより環になっている。
(2) S は R の単位元を元として持つ。

上の条件のうち、(1) が本質的部分であり、(2) は冒頭で述べた注意に沿うための技術的条件である。ただし、(2) をぬかしてしまうと理論は見かけ上かなり違った形になるので単位元のない環を扱う時 (がもしあればその時) には注意が必要である。

問題 2.2. (各 1) 次のものは複素数全体のなす環 $\mathbb{C}$ の部分環であるか、理由をつけて答えなさい。

(1) 5 以外の 整数全体の集合 $\mathbb{Z} \setminus \{5\}$.
(2) $\mathbb{Z} + 2\sqrt{-1}\mathbb{Z} = \{x + 2\sqrt{-1}y; x, y \in \mathbb{Z}\}$.
(3) $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\mathbb{Z} = \{x + \frac{1}{2}\sqrt{-1}y; x, y \in \mathbb{Z}\}$.
(4) $\mathbb{Z} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathbb{Z}$.
(5) $\mathbb{Z} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\mathbb{Z}$.

問題 2.3. $\mathbb{C}$ の部分環 S が、 $1, \sqrt{3} + \sqrt{5}$ を元として持っているとします。この時、$2\sqrt{15}, 4\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ も S の元であることを示しなさい。

問題 2.4. 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R (つまり、$\mathbb{Q} \subset R \subset \mathbb{C}$) が $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を元として含むとき、$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ も R の元であることを示しなさい。

問題 2.5. 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R が $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ を元として含むとき、$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ も R の元であることを示しなさい。

問題 2.6. 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R が $\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$ を元として含むとき、$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ も R の元であることを示しなさい。

問題 2.7. 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R について、次の二つの条件は同値であることを示しなさい。

(1) $\sqrt{3} + \sqrt{7} \in R$.

(2) $\sqrt{3} \in R$ かつ $\sqrt{7} \in R$.

問題 2.8. 前問で、R が $\mathbb{Q}$ を部分環として含む、という条件を外しても同様のことが言えるだろうか。正しいなら証明し、間違っているなら反例をあげなさい。

問題 2.9. (各 1)

(1) $S = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} + \mathbb{Z}\sqrt{3} = \{k + l\sqrt{2} + m\sqrt{3}; k, l, m \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}$ の部分環だろうか？
(2) 上の S を含む、$\mathbb{C}$ の部分環で、最小のもの (つまり、S で生成される $\mathbb{C}$ の部分環) はなにか？

問題 2.10. (各 1)

$$S = \mathbb{Z} + 2\sqrt{2}\mathbb{Z} + 2\sqrt{3}\mathbb{Z} + 2\sqrt{6}\mathbb{Z} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})\mathbb{Z}$$

とおく。このとき、

(1) S は $\mathbb{C}$ の部分環であるだろうか。
(2) $S \not\ni \sqrt{2}$ をしめしなさい。
(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を元として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R はかならず S を部分集合として含むことを示しなさい。

問題 2.11. (全部で 1)

(1) $\mathbb{Z}$ の可逆元を全て求めよ。
(2) 一般の環 R について、 R の可逆元の全体は群をなすことを証明せよ。

問題 2.12. $\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ に、普通の和と、ベクトルの外積を入れたものは環であるだろうか。

次の問題は上級者用。従って細かい説明はしない。解こうと思うものは詳細は自分で考えること。以下、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ という記号を用いる。

問題 2.13. (各 1) 環 R が与えられているとする。R の元の列の全体

$$S(R) = \{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots); \forall i \in \mathbb{N} a_i \in R\}$$

に、成分ごとの和で和を定義し、積を

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \cdot (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j})_{i\in\mathbb{N}}$$

で定義するとき、

(1) $S(R)$ はこの和と積について環をなすことをしめしなさい。
(2) $S(R)$ のののうち、有限数列であるものの (すなわち、数列 (a_i) であって、「$\exists N \forall i > N \quad a_i = 0$」を満たすもの) 全体を $F(R)$ と書くと、これは $S(R)$ の部分環をなすことをしめしなさい。
(3) $r \in R$ に対して、$(r, 0, 0, \dots)$ を c_r と書くことにする。$c_R = \{c_r; r \in R\}$ は $F(R)$ の部分環であることを示しなさい。
(4) $F(R)$ は、 c_R 上 $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$ で生成されることを示しなさい。