代数学 IB NO.7 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《多項式環の扱い方と環準同型定理》

環 R から S への準同型 f が与えられたとき、写像に関する一般論から f による R のクラス分けができる。それは $\mathrm{Ker}(f)$ による R のクラス分けと一致するのでした。

……………………………………………………………………………

環 R 上の一変数多項式環 $R[X]$ とは、R の元と、一つの変数 X とで生成される環であった。同様に $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ を定義することができる。その出自から当然、次の補題が成り立つ

補題 7.1. 任意の環 R について、

$$R[X][Y] \cong R[X, Y]$$

という自然な同型が存在する。もっと一般に

$$R[X_1, X_2, \ldots, X_n] \cong R[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}][X_n]$$

がなりたつ。

命題 7.1 (代入原理)**.** 環 S とその部分環 R が与えられているとする。このとき、任意の S の元の n 個の組 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ にたいして、次のような環準同型 $\psi_s[X_1, X_2, \ldots, X_n] \to S$ が唯一つ存在する。

(1) $\psi(r) = r \qquad (\forall r \in R)$,

(2) $\psi(X_j) = s_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

さらに、ψ は次のような形で与えられる。

$$\psi(p) = p(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

例 7.1. 環としての同型 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$ が存在する。$\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{C}$ への写像 f を、

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。

(2) f は環の準同型である。

(3) f の像は $\mathbb{C}$ 全体である。

(4) f の核は $(X^2+1)\mathbb{R}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$$

が結論される。

問題

環準同型 $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ が与えられていて、$f(X) = 3$ だと分かっているとする。 このとき、

(1) 多項式 $X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$ の f による像を具体的に求めなさい。

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の元で、 0 と異なるものを具体的に3つあげなさい。