# 代数学 II 要約 NO.7

第 7 回目の主題：$\boxed{\text{PID 上の有限生成加群 (2)}}$

**補題 7.1.** PID $A$ 上の加群 $M$ の元の組 $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ が与えられているとする。さらに、$\underline{x}$ の関係式 $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ および $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ が与えられているとする。つまり、2 つの関係式

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k = 0 \end{cases}$$

が与えるとする。内積の記法の真似をして、このことを $\underline{a} \cdot \underline{x} = 0, \underline{b} \cdot \underline{x} = 0$ と表記しよう。このとき、ある $p, q, r, s \in A$ が存在して、次のことが成り立つ。

(1) $ps - qr = 1$.
(2) $pa_1 + qb_1 = \gcd(a_1, b_1)$.
(3) $ra_1 + sb_1 = 0$.

そこで、$\underline{a}' = p\underline{a} + q\underline{b}, \underline{b}' = r\underline{a} + s\underline{d}$ とおくと、$\underline{a}', \underline{b}'$ は $\underline{a}, \underline{b}$ と同等の関係式 (つまり、互いに他から導かれる関係式) で、

$$a'_1 = \gcd(a, b), \quad b'_1 = 0$$

をみたす。

**補題 7.2.** PID $A$ 上の有限生成加群 $M$ が与えられているとし、No.6 の記法を用いることとする。$\underline{x} \in \mathbb{S}_M$ と、そのみたす関係式 $\underline{a}$ ($\underline{a} \cdot \underline{x} = 0$ をみたす $\underline{a}$) の組を全て考える。これらの全ての組み合わせについて、$\gcd(\underline{a}) = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ を考えた時、それらの中で (整除に関して) 極小なものが存在する。 その一つを以下 $d_0$ と書こう。このとき、

(1) $d_0 = 0$ なら $M$ は自由加群である。以下、$d_0 \neq 0$ とする。
(2) ある $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in \mathbb{S}_M$ が存在して、

$$d_0 \cdot u_1 = 0$$

なる関係式が成立する。以下この $\underline{u}$ について考える。
(3) $\underline{u}$ の任意の関係式 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ について、その各成分 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ は各々 $d_0$ で割り切れる。
(4) $M$ は $Au_1$ と $Au_2 + \cdots + Au_k$ の直和と同型である。

この補題を用いると、前回の定理よりすこし強い主張をすることができる。

**定理 7.3.** 可換 PID $A$ 上の有限生成加群 $M$ が与えられているとする。このとき、$M$ の生成系 $\underline{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ にたいして、$\underline{m}$ を (変換 1),(変換 2),(変換 3) を有限回繰り返すことにより、$M$ の新しい生成系 $\underline{w}$ であって、

$$M \cong Aw_1 \oplus Aw_2 \oplus \cdots \oplus Aw_k \cong A/a_1A \oplus A/a_2A \oplus \cdots \oplus A/a_kA \qquad (a_1, \ldots, a_k \in A)$$

(巡回加群の直和) となるものが存在する。

さらに、上の同型は $a_k | a_{k-1} | a_{k-2} | \ldots | a_2 | a_1$ となるように取れる。

**系 7.4** (有限生成アーベル群の基本定理)**.** 任意の有限生成アーベル群 $G$ は巡回群の有限個の直和である。もっと詳しくは、$G$ は

$$\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z})$ という加群とアーベル群として同型である。

系 7.4 の応用として、次の定理を挙げておく。

**定理 7.5.** 体 $K$ の乗法群 $K^\times$ の有限部分群は常に巡回群である。とくに、有限体の乗法群はかならず巡回群である。