代数学 II 要約 NO.8

第 8 回目の主題：$\boxed{\text{PID 上の有限生成加群 (小まとめ)}}$

PID A 上の有限生成加群 M と、その生成元 $m_1, m_2, \ldots, m_s$ が与えられているとき、$m_1, m_2, \ldots, m_s$ から生成元の変換 (変換 1-変換 3) を行います。前回までに、次のような手順を説明しました。

(手順 1) 関係式がひとつあるとき、生成元を取り替えて、$cx_1 = 0$ がその関係式であるようにする。

(手順 2) 加減法で、第一の生成元に関する係数を単純化する。

これを繰り返すことにより、M の関係式を単純にできるのでした。

系 8.1 (有限生成アーベル群の基本定理)**.** 任意の有限生成アーベル群 G は巡回群の有限個の直和である。もっと詳しくは、G は

$$\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z})$ という加群とアーベル群として同型である。

応用として、次の定理を挙げておく。

定理 8.2. 体 K の乗法群 $K^\times$ の有限部分群は常に巡回群である。とくに、有限体の乗法群はかならず巡回群である。