論理と集合要約 NO.14

第 14 回目の主題：復習。

問題 14.1. ナミヘイは、「どのような正の実数をカツオが言ったとしても、それより小さい正の実数を挙げることができる」と言った。ナミヘイは正しいだろうか。また、この文の真理値だけを問題にしたとき、「」内を $\forall, \exists$ を用いて書くとどうなるだろうか?

問題 14.2. $\mathbb{Z}$ における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 6\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

(1) $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。
(2) 以下この問題では、$x \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ に関するクラスを $[x]$ と書く。1 のクラス $[1]$ に属する $\mathbb{Z}$ の元をすべて答えなさい。
(3) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 3 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。
(4) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 4 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。

問題 14.3. $\mathbb{Z}$ における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 12\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

(1) $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。
(2) 以下この問題では、$x \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ に関するクラスを $[x]$ と書く。3 のクラス $[3]$ に属する $\mathbb{Z}$ の元をすべて答えなさい。
(3) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 5 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。
(4) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 4 で割った余り$)$ で定義できるだろうか。

例題 14.1. 命題 P:$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x < y \implies \exists z \in \mathbb{Z}(x < z \text{ and } z < y)))$ について、

(1) P の否定命題 (not P) を「not を使わずに」書きなさい。
(2) P と not P のうち、真であるのはどちらだろうか。

例題 14.2. 写像 $f : \mathbb{Z} \ni x \mapsto x^2 - 2x \in \mathbb{Z}$ に対して、

(1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
(2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めなさい。
(3) $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$ を求めなさい。
(4) f は単射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
(5) f は全射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
(6) f によって $\mathbb{Z}$ に同値関係 $\sim_f$ が

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により定まる。この $\sim_f$ により 3 と同値になる $\mathbb{Z}$ の元をすべて求めなさい。

例題 14.3. 写像 $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 - 2x \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
(2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めなさい。
(3) f は単射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
(4) f は全射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
(5) f によって $\mathbb{R}$ に同値関係 $\sim_f$ が

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により定まる。この $\sim_f$ により 3 と同値になる $\mathbb{R}$ の元をすべて求めなさい。

例題 14.4. 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする。このとき

(1) X の任意の部分集合 A, B にたいして、$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成り立つことを示しなさい。

(2) X の任意の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ にたいして、$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$ が成り立つことを示しなさい。

(3) X の任意の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ にたいして、$f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$ が成り立つことを示しなさい。

◎ 濃度。

定理 14.5. 任意の集合 X に対して、X の部分集合全体の集合 2^X は、X よりも濃度が真意大きい。