論理と集合要約 NO.15

第 15 回目の主題：復習と補足。

◎ 同値関係

◯「関係」

定義 15.1. 集合 S の上の二項関係とは、$S \times S$ の部分集合 $\mathcal{R}$ のことである。$x, y \in S$ にたいして、$(x, y) \in \mathcal{R}$ のとき $x \underset{\mathcal{R}}{\sim} y$ と書いたりする。

$$\text{関係}\begin{cases} \text{2 項関係}\begin{cases} \text{大小関係}\\ \text{包含関係}\\ \text{同値関係}\begin{cases} \text{等しいという関係}\\ \text{合同関係}\\ \text{相似関係}\\ \text{写像 } f \text{ による同値関係}\\ \text{etc}\end{cases}\\ \text{etc}\end{cases}\\ \text{3 項関係}\\ \text{etc}\end{cases}$$

◯ クラス分け (分類) をするのに用いられる関係:同値関係

* クラス分けがうまくできるためには守らなければならないルールがある。
それが、推移律、反射律、対称律。

◯ 問題を 2 つに分ける

(1) $\sim$ は 同値関係か?

(2) $\sim$ によるクラス分けを行え。

◯ 同値関係による等化写像。

集合 X に同値関係 $\sim$ が定まると、「等化写像」(「自然な射影」)

$$X \to X/\sim$$

が、各 $x \in X$ に対して x の クラスを対応させることで定まる。

◎ 部分集合全体の集合。X の部分集合 S は、X 上の $\{0, 1\}$ のみに値をとる関数

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \text{ のとき}\\ 0 & x \notin X \text{ のとき}\end{cases}$$

と一対一に対応する。

ところで:

定義 15.2. X から Y への写像の全体のなす集合を Y^X と書き表す。

この定義に従うと、X の部分集合の全体は $\{0, 1\}^X$ の元と一対一に対応するということになる。そこで:

定義 15.3. X の部分集合の全体のなす集合を 2^X と書き表す。

定理 15.4. X から 2^X への全射は存在しない。

とくに、例えば $\mathbb{Z}$ の部分集合の全部を書きたいとき、$S_1, S_2, \ldots,$ と添え字をつけていたのでは、添字が足りなくなる。そこで添字集合が必要にな。