代数学演習 I 問題 NO.10

一意分解環・単項イデアル整域・ユークリッド整域編 (2)

問題 10.1. 単項イデアル整域 R の元 a,b について、R のイデアル $I=(a,b)$ は、(R が単項イデアル整域だから、) ある一つの元 d で生成されるイデアル (d) に一致する筈です。この d は a,b の最大公約元であること、すなわち、

(1) d は a,b の公約元である。(つまり $a=da', b=db'$ となる $a',b' \in R$ が存在する。)
(2) $d' \in R$ が a,b の公約元ならば、d' は d の約元である。

ということを示しなさい。

上の問題により、単項イデアル整域では、「最大公約元」を、数のときと同様に扱えます。

問題 10.2. α を $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元とします。このとき、$|\alpha|^2$ は素数か、素数の 2 乗かのいずれかであることを示しなさい。(ヒント:素数 $p \in \mathbb{Z}$ が $|\alpha|^2$ の約数ならば、$p|\alpha\bar{\alpha}$. p と α との最大公約元をとってみなさい。)

ユークリッド環においては、《ユークリッドの互除法》によって最大公約元を求めることができます。手始めに次の問題をどうぞ。

問題 10.3. 次の環 R の二つの元の最大公約数をユークリッドの互除法により求めなさい。

(1) $R=\mathbb{Z}; 100010, 10124$
(2) $R=\mathbb{C}[X]; X^{10}-1, X^{12}-1$

例題 10.1. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ において、$3+4\sqrt{-1}, 15$ の最大公約元を求めなさい。

(解答)

$|15|=15>5=|3+4\sqrt{-1}|$ だから、まず 15 を $3+4\sqrt{-1}$ で割ってみる。

$$\frac{15}{3+4\sqrt{-1}}=\frac{9-12\sqrt{-1}}{5}=1.8-2.4\sqrt{-1}$$

この商にもっとも近いのは $2-2\sqrt{-1}$.

$$10-(3+4\sqrt{-1})(2-2\sqrt{-1})=1-2\sqrt{-1}$$

ゆえに、15 を $3+4\sqrt{-1}$ で割った《余り》は $1-2\sqrt{-1}$. こんどは $3+4\sqrt{-1}$ を $1-2\sqrt{-1}$ で割る。割り切れるので、答えは $1-2\sqrt{-1}$.

問題 10.4. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ において、次の各組の最大公約元を求めなさい。

(1) $12+36\sqrt{-1}$, $5+13\sqrt{-1}$
(2) $7+8\sqrt{-1}$,226

問題 10.5. $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ において、次の各組の最大公約元を求めなさい。

(1) $2+3\sqrt{-2}$, $11+22\sqrt{-2}$
(2) $5+3\sqrt{-2}$,129

問題 10.6. $\mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$ の次の元を簡単にしなさい。

$$\bar{X}^5+2\bar{X}^4+3\bar{X}+2$$

問題 10.7. $\mathbb{Q}[X]/(X-1)$ の元 $\bar{X}^{100}$ を簡単にしなさい。

問題 10.8. 環 $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ の元 $a\bar{X}+b$ $(a,b\in\mathbb{Q},\ (a,b)\neq(0,0))$ の逆元を (それが存在する場合には) 求めなさい。この環は体だろうか。

問題 10.9. 環 $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1)$ の元 $a\bar{X}+b$ $(a,b\in\mathbb{Q},\ (a,b)\neq(0,0))$ の逆元を (それが存在する場合には) 求めなさい。この環は体だろうか。

問題 10.10. $\mathbb{Z}[X]/(X^2-5)$ の元 $(\bar{X}+1)^3$ を簡単にしなさい。

問題 10.11.
(1) 10 進数 $123456789(10)=1\times10^8+2\times10^7+3\times10^6+4\times10^5+5\times10^4+6\times10^3+7\times10^2+8\times10^1+9$ を 9 で割った余りを求めなさい。
(2) 7 進数 $135246(7)=1\times7^5+3\times7^4+5\times7^3+2\times7^2+4\times7+6$ を 6 で割った余りを求めなさい。
(3) 16 進数

147ad258be369cf(16)

$$(=1\cdot16^{14}+4\cdot16^{13}+7\cdot16^{12}+10\cdot16^{11}+13\cdot16^{10}+2\cdot16^9+5\cdot16^8$$
$$+8\cdot16^7+11\cdot16^6+14\cdot16^5+3\cdot16^4+6\cdot16^3+9\cdot16^2+12\cdot16+15)$$

を 15 で割った余りを求めなさい。(a=10,b=11,c=12,d=13,e=14,f=15; コンピュータの世界では 147ad258be369cf(16) のことを 147ad258be369cfh とか 0x147ad258be369cf と書きます。
(4) 多項式 $X^{14}+3X^5+7X^2+8$ を $X-1$ で割った余りを求めなさい。

問題 10.12. $\mathbb{Z}$ に No.1 の問題 1.7, 1.8 で定義された和 $\boxplus$, 積 $\boxtimes$ を導入した環を R とするとき、
(1) $1_R=6$ であることを確認し、正の整数 n にたいして、

$$n_R=\overbrace{1_R\boxplus1_R\boxplus1_R\boxplus\cdots\boxplus1_R}^{n}(=\overbrace{6\boxplus6\boxplus6\boxplus\cdots\boxplus6}^{n})$$

の値を求めなさい。
(2) $\mathbb{Z}$ から R への準同形写像を作りなさい。
(3) $\mathbb{Z}\cong R$ であることを示しなさい。