微分積分学基礎 NO.3 要約

今日のテーマ:**(実数区間上の) 連続関数**

定義 3.1. 実数 a を含む区間上で定義された関数 f にたいして、実数 A が、

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \text{ such that } |x-a| < \delta \implies |f(x)-A| < \epsilon$$

を満たすとき、A は f の $x \to a$ での極限であるといい、$\lim_{x\to a} f(x) = A$ と表記する。

定理 3.2.
極限は存在するとすれば一つである。
極限は和、差、積、(分母が 0 でない) 商をたもつ。

定義 3.3. 実数 a を含む区間 I 上で定義された関数 f が、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

を満たすとき、f は a で連続であるという。f が I の全ての点で連続であるとき、f は I で連続であるという。

命題 3.4. 区間 I を固定すると、
I 上の 連続関数 f, g の和、差、積は連続である。I
f, g が連続で、I 上の各点 x で $g(x) \neq 0$ なら、f/g も I 上で連続である。

命題 3.5. 次の関数は $\mathbb{R}$ 上で連続である。

(1) 定数関数 $f(x) = c$.
(2) $f(x) = x$.
(3) $\sin(x)$, $\cos(x)$
(4) e^x

命題 3.6. 区間 I 上で関数 f が定義され、I の各点 x について $f(x)$ が区間 J に属するとする。このとき、I 上の関数 (f, g の合成関数) $g \circ f$ が

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義される。さらに、f, g が連続なら $g \circ f$ も連続である。

定理 3.7. 塀区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数 f が狭義単調増加であるとする。すなわち、

$$\forall x \forall y \in I \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

と仮定する。このとき、f の逆関数 f^{-1} が定義されて、連続である。f^{-1} は $J = [f(a), f(b)]$ 上定義される関数であって、任意の $x \in I$ に対し、$f^{-1}(f(x)) = x$ を満たし、また任意の $y \in J$ に対し、$f(f^{-1}(y)) = y$ を満たす。

定義 3.8. (1) $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ の逆関数を $\log(x)$ と表記し、x の自然対数と呼ぶ。

(2) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ の逆関数を $\mathrm{Sin}^{-1}(x)$ とか $\arcsin(x)$ とかく。

(3) $[0, \pi] \ni x \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ の逆関数を $\mathrm{Cos}^{-1}(x)$ とか $\arcsin(x)$ とかく。

(4) $[0, \pi] \ni x \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ の逆関数を $\mathrm{Cos}^{-1}(x)$ とか $\arccos(x)$ とかく。

(5) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ の逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}(x)$ とか $\arctan(x)$ とかく。