

## 理工系線形代数学 NO.8 要約

今日のテーマ:行列式 (3) 余因子と逆行列

命題 8.1.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  が任意の  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  に対して成り立つ。

定義 8.2. 行列  $A$  が与えられた時、その  $i$  行と  $j$  列を引っこ抜き、その行列式をとってついでに符号  $(-1)^{i+j}$  をつけたものを  $A$  の余因子といい、 $A_{ij}$  で書き表す。

補題 8.3.  $A$  の 1 列目が基本列ベクトル  $e_i$  に等しいならば、 $\det(A) = A_{i1}$ .

(もっと一般に、 $A$  の  $j$  列目が  $e_i$  に等しいならば、 $\det(A) = A_{ij}$ .)

命題 8.4 (行列式の 1 行目に関する展開). 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$$

が成り立つ。

上の命題と同様にして、2 行目、3 行目、...  $n$  行目に関する展開が得られる。 $A$  を、「 $A$  の 1 列目を  $A$  の  $k$  列目に置き換えた行列」に置き換えることにより、つぎの結果を得ることができる。

命題 8.5. 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}A_{1j} = 0 \quad (k = 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

これもまた、1 行目だけについて特別に言えることではなく、結局次のことが言える:

命題 8.6. 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}A_{mj} = \delta_{km} \det(A) \quad (\forall k, \forall m \in \{1, 2, \dots, n\})$$

が成り立つ。

この式は次のことを意味している:

命題 8.7 (クラメールの公式). 任意の  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、各  $ij$  成分が  $A$  の余因  $A_{ji}$  であるような行列 ( $i, j$  の順番に注意。) を  $\tilde{A}$  と書くことにする。( $\tilde{A}$  のことを  $A$  の余因子行列とよぶ。) このとき、

$$A\tilde{A} = \det(A)I$$

系 8.1.  $n$  次正方行列  $A$  が逆行列を持つことと、 $\det(A) \neq 0$  とは同値である。