理工系線形代数学 NO.14 要約

今日のテーマ: 行列の対角化。

命題 14.1. n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の固有ベクトル $P = \begin{bmatrix} \mathbb{v}_1 \dots \mathbb{v}_n \end{bmatrix}$ に対して、$AP = P \cdot \mathrm{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ が成り立つ。とくに $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ が、一次独立ならば、P は可逆で、

$$(\bigstar) \qquad P^{-1}AP = \mathrm{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

が成り立つ。$(\bigstar)$ を A の対角化という。

命題 14.2. P を n 次の正方行列、P は可逆だとする。このとき、任意の n 次正方行列 A_1, A_2 に対して次のことがなりたつ。

(1) $P^{-1}(c_1A_1 + c_2A_2)P = c_1P^{-1}A_1P + c_2P^{-1}A_2P$. $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
(2) $P^{-1}(A_1A_2)P = P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P$.

命題 14.3. A, P を n 次の正方行列、P は可逆だとする。$B = P^{-1}AP$ とおくとき、B が対角行列であるか否かにかかわらず、

(1) 任意の多項式 $f(x)$ に対して、
  (a) $P^{-1}f(A)P = f(B)$
  (b) $\det(f(A)) = \det(f(B))$..
  (c) A の固有多項式と B の固有多項式は等しい。
(2) とくに、$P^{-1}AP = \mathrm{diagonal}(\lambda_1 \dots, \lambda_n)$ のときには、
  (a) $f(A) = P\mathrm{diagonal}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))P^{-1}$..
  (b) $\det(f(A)) = f(\lambda_1) \cdot \dots \cdot f(\lambda_n)$.
  (c) A の固有多項式は $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ と等しい。

*上の命題の極限を考えることにより、行列の $\exp, \sin, \cos$ も同様に計算することができる。これは微分方程式の解法などでとくに有用である。

命題 14.4. n次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ の固有ベクトル $\mathbb{v}_1 \dots \mathbb{v}_k$ があったとする。もし、$\lambda_1, \dots \lambda_k$ がどれも異なれば、$\mathbb{v}_1 \dots \mathbb{v}_k$ は一次独立である。

系 14.1. n 次正方行列 A の n 個の固有値が実数で、互いに相異なれば、A は対角化可能である。

*話を複素数にまで拡張しておくと、つぎのように単純化される。

系 14.2. n 次複素正方行列 A の n 個の固有値が互いに相異なれば、A は対角化可能である。

* 行列 $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値は $0, 0, 0$ で、固有ベクトルは ${}^t[1, 0, 0]$ の一つだけである。よって N は対角化できない。$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 21_3 + N$ の固有値は $2, 2, 2$ で、対角化できない。一般の、対角化不可能な行列については、座標変換で「ジョルダンの標準形」までは持っていくことができる。詳しくは線形代数の進んだ成書を参考のこと。