

ZORN の補題

このページは Wikipedia の Zorn の補題の項 (2017/10/25 閲覧) のコピペを、若干記号等を好みに応じて変更したものである。

定理 0.1. 順序集合 S があるとする。もし S の任意の鎖が S 内に上界を持つとすると、 S は極大元を持つ。

Zorn の補題を使って、次のことを示せる:

補題 0.2. 環 R とそのイデアル I_0 で、 $R \supsetneq I_0$ を満たすものがあつたとする。このとき、 I_0 を含む R の極大イデアルが存在する。とくに、 $\{0\}$ でない環 R は極大イデアルを持つ。

Proof. Zorn の補題で

$$S = \{I_0 \text{ を含む } R \text{ の (両側) イデアルのうち } R \text{ 自身以外からなるもの}\}$$

を考える。 S は I_0 を含むので空ではない。 S は包含関係により半順序集合である。 R の極大イデアルを見つけることは S の極大元を見つけることと同じである。

Zorn の補題を適用するために、 S の空でない全順序部分集合 T をとる。 T に上界が存在することを示す必要がある。つまり、イデアル $I \subset R$ が存在して、それは T のどの要素より以上であり、しかも R よりは厳密に小さいことを示す必要がある。 I を T の全てのイデアルの和集合とする。 T は少なくともひとつ元を持ち、それは I_0 を含んでいるので、和集合 I も I_0 を含み、とくに空集合ではない。 I がイデアルであることを示すため、 a と b を I の元とすると、ふたつのイデアル $J, K \in T$ が存在し、 $a \in J$ であり、 $b \in K$ ある。 T は全順序であつたので、 $J \subset K$ または $K \subset J$ である。前者の場合は、 a も b もともに K の元であり、和 $a+b$ も K の元である。よつて、 $a+b$ は I の元である。後者の場合は、 a も b もともに J の元であるから、同様に $a+b$ は I の元である。さらに、任意の $r \in R$ に対して、 ar と ra は J の元であるから、 I の元でもある。以上により、 I は R のイデアルであることが分かつた。

そして、イデアルが R と一致することは 1 を含むことと同値である。そこで、 I が R に等しいと仮定すると、それは 1 を含み、 T のある要素が 1 を含むことになり、それは R と一致する。しかし、これは S から R を除いていたことに矛盾する。

Zorn の補題の条件は確認できたので、 S には極大元が存在する。言い換えると、 R には極大イデアルが存在する。□

上のように、Zorn の補題の適用時には、ある一つの集合の部分集合の全体あるいは一部 (この場合は全体とは異なるイデアル) を使用することも多い。

Zorn の補題の証明の概略。

Zorn の補題

順序集合 S があるとする。もし S の任意の鎖が S 内に上界を持つとすると、 S は極大元を持つ。もっと強く、 S の任意の元 s_0 に対して、 $m \geq s_0$ を満たすような S の極大元 m が存在する。

以下では $s_0 \in S$ を固定し、補題の後半部分を証明する。

$$A = \{s_0 \text{ を元として含むような } S \text{ の鎖}\}$$

とおく。 A は包含関係に関して順序集合をなす。

- (1) $A \ni \{s_0\}$ よって A は空ではない。
- (2) A の任意の鎖 \mathcal{T} は上限 (=最小上界) を持つ。

さて、 A の任意の元 T をとってくる。 T は S の鎖であるから、仮定により S 内に上界 a_T を持つ。 a_T が S の極大元ならば話は終わりであるから、 a_T は極大ではないとしてよい。したがって、ある $b_T \in S$ が存在して、 b_T は T のどの元よりも大きい。そこで、おのおのの $T \in A$ に対してそのような b_T を選び、写像 $f: A \rightarrow A$ を

$$f(T) = T \cup \{b_T\}$$

で定義する。

- (3) f は A から A への増加写像である。
- 今の場合、 f は狭義増加写像であるから、次の Bourbaki の補題に反する。

Bourbaki の補題

順序集合 A があるとする。もし

- (1) $A \ni \exists a_0$.
- (2) A の任意の鎖 \mathcal{T} は上限 (=最小上界) を持つ。(これを以下では $\sup(T)$ と書くことにする。)
- (3) A から A への増加写像 f が存在する

とすると、ある $x_0 \in A$ が存在して、 $x_0 \geq a_0$ かつ $f(x_0) = x_0$ である。

Bourbaki の補題の証明の概略。

$M \subset A$ が f -認容であるというのを

- (1) $f(M) \subset M$
- (2) M の任意の鎖 T に対して、 $\sup(T) \in M$

で定義する。

$M = \langle a_0 \rangle$ を、「 a_0 をふくむ f -認容な A の部分集合のうち最小のもの」として定義する。 M は a_0 を含む f -認容な A の部分集合の全体の共通部分であり、「 f, \sup を作用として a_0 で生成されたような集合」と思っても差し支えない。この証明の核心はつぎのことである。

証明の核心

$\langle a_0 \rangle = M$ 自身も全順序集合 (つまり、鎖) である。

これがわかると、 M 自体が上限 m_0 をもち、 M の f -認容性から $m_0 \in M$ である。 f の増加性から $f(m_0) = m_0$ すなわち Bourbaki の補題の x_0 としては $m_0 = \sup(\langle a_0 \rangle)$ を取れば良いことがわかるという寸法である。

では「核心」の証明はというと、以下 CM ... じゃなくて次ページ。

- (1) $M \ni c$ が extreme $\Leftrightarrow \forall x \in M (x < c \implies f(x) \leq c)$ で、「extreme な元」を定義する。
- (2) extreme な元 c に対して、 $M_c = \{x \in M; |x \leq c \text{ or } f(c) \leq x\}$ と定義すると、 M_c 自身も f -認容なことがわかり、したがって $M = M_c$.
- (3) $M_{\text{extreme}} = \{c \in M | c \text{ は extreme}\}$ と定義すると、これもまたもや f -認容であることがわかって、 $M = M_{\text{extreme}}$
- (4) (3) のことから、直ちに M は全順序集合であることがわかる。

という具合。詳しくは成書をご覧いただきたい。

この稿では

S. Lang Real and functional analysis third edition (GTM)
を参考にした。