NON-COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD

目次

1. 問題の説明

1.10. プラン.

(1) $\mathbb{Z}$ 上、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の射影座標環からはじめて Marsden-Weinstein 商をとることにより 非可換の次数付き環 A を得る。
(2) 標数 0 の体上で考えるならば、A の Proj は空である。
(3) 標数 $p > 0$ ならば、 Proj は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ であり、A は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras とみなせる。
(4) コホモロジーは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の可換理論における普通のコホモロジーとして計算できる。
(5) 制約 ($\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の subvariety) を考えると話が変わる。

Date: 2018 年 2 月 11 日.

   (a) $(I^p, \bar{I}^p)$ を定義イデアルとして non-commutative なものを割る。
   (b) これについてはあとで深く考える必要がある。
   (c) $X \times Y \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ みたいのも考えられるかも。
   (d) どう進むのか。
   (e) そもそも意味があるのか。

合理性の検討

(1) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ を $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}$ の非可換化の Marsden Weinstein quotient として作る。–$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ による商による実現として自然。
(2) $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}$ の非可換化としては, 正準交換関係を用いる。–歴史的、常識的に見て自然。
(3) 微分作用素として実現し、影をとる。–微分作用素の環をモデルにとる限り projective/proper なものはできない。
(4) とくに $\mathcal{O}(1)$ 上の微分作用素を考える。– 正当性:Fubini-Study metric を生み出す。
(5) super 変数を考える–(非可換) 微分作用素の構成、Fermion の存在。

問題と期待される解答

(1) ここで作った 非可換 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ は妥当なものであることを示せ。–影は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. (check 済).
(2) 非可換 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ のコホモロジーは? –基本的に可換なものと同じであってほしい。
(3) 非可換代数多様体を一般的に定義せよ。– $(I^p, \bar{I}^p)$ で定義したものであってほしい。ただしその妥当性はさらに論を待たねばならない。
(4) 非可換な方向への変形理論とモジュライ理論の確立。

1.11. **2017/12/23 時点のみちすじガイド.**

(1) 根本問題: (非斉次) Weyl 環 weyl の幾何学的意味 (1.12)
   (a) 正標数に還元すると $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の開集合
$$U_\diamondsuit \overset{\text{def}}{=} \{([a_0 : a_1 : \cdots : a_n], [\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \cdots : \bar{a}_n]); \sum_i a_i \bar{a}_i \neq 0\}$$
   上の sheaf of algebras と対応する。(1.12.1)
   (b) $U_\diamondsuit$ を完備化するには →
      (i) 一つ変数を付け加えて、 斉次化する。
      (ii) 付け加えた点たちは、$\sum_i a_i \bar{a}_i = 0$ を満たす点に対応し、a_i が複素数で、 $\bar{a}_i$ が本当に a_i の複素共役の場合には「空集合」である。
   (c) 微分形式は、Clifford 代数の元として作る。
(2) 斉次 Weyl-Clifford 代数 WC の定義 (2.20)
   (a) 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$. (非斉次の場合には 1.14 参照のこと。斉次の場合は 2.20.4 を参照のこと。)
(3) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層としての $\mathcal{WC}$ (2.21).
   (a) ステレオ加群としての見方 (2.25)
   (b) $\mathbb{P}^n$ 上の層 $(\pi_* \Omega)^{\mathbb{G}_m} \cong \Omega[\partial \log(X_0)]$ (2.22).
   (c) $\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \left(\Omega[\partial \log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)]\right)(-l, -l)$ (2.25)
(4) Moment map (Moment element) で割る。(1.13,1.15)
   (a) 大きく分けて 2 種類の Moment element を考えられる。(1.15) 無限小の場合と、有限の場合である。

(b) (幾何の方でいうと) $\mathbb{A}_o^{n+1} \times \mathbb{A}_o^{n+1}$ から、$\mathbb{G}_m$ 作用で 2 度 ((1,-1) 作用と (1,1) 作用で) 割って、最後に μ_1 で切る。(1.13) $\mathcal{A} \cong \mathcal{WC}/(\mu_1)$. (4.40(書きかけ))

(5) cohomology (無限小の場合)

$$\mathcal{A} \cong \left(\Omega[\partial \log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)]\right)$$

但し $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は通常のものとは少し異なる。

complex として、$\mathcal{A}, \bar{\mathfrak{d}}$ は

$$(\Omega[\partial \log(X_0)], \bar{\mathfrak{d}}) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)], 0)$$

と homological isom. さらに、それは

$$(\Omega \xrightarrow{k\times} \Omega) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)], 0)$$

と quasi isomorphic. (下の事参照)

(6) (ここの段階は考慮を要するが、とりあえずここでは) $\mathfrak{d}$ を $\bar{\mathfrak{d}}$-complex の endomorphism として捉えることにする。すると、$((\mathcal{A}, \bar{\mathfrak{d}}), \mathfrak{d})$ は

$$(\mathbb{k}_1[k] \xrightarrow{k\times} \mathbb{k}_1[k]) \otimes_{\mathbb{k}_1[k]} \Omega \boxtimes (\Omega[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)], \mathfrak{d})$$

と quasi isomorphic であり、それは

$$(\mathbb{k}_1[k] \xrightarrow{k\times} \mathbb{k}_1[k]) \otimes_{\mathbb{k}_1[k]} (\Omega, 0) \boxtimes (\Omega, 0)$$

と quasi isomorphic である。ここのところ、derived category レベルの話を二回行うことに相当することをやっているので、正確な議論を行うにはもう少し考察が必要である。ともあれ、コホモロジーレベルでは非可換理論がとくに可換理論と違うところは見られず、あえて言えば問題設定 ($\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の定義の半必然性など) に非可換性が関与しているぐらいである。

(7) 有限の場合が、今年のはじめごろに土基を悩ませたのであるが、C 消去の方針ではなく、単に (有限の場合の) $\mu_1 = 0$ を課せば $\mu_1 \equiv kC$ modulo exacts となって、うまく行きそうである。これも少し論を待たねばならない。

(derived category による 前変数の $\bar{\mathfrak{d}}$ の関与する複体の扱い)

(追記)–ここのところは derived category の中で扱うよりもむしろただの複体と見て取り扱うほうが易しいようだ。axiom TR3 で存在が保証される map は一意ではなく、一般に取扱がむづかしいことがしられている。ここでは単に map を具体的に作ったほうが良いというわけ。)

(1) $0 \to \Omega \xrightarrow{u} \Omega[\partial \log X_0] \xrightarrow{v} \Omega \to 0$: exact.

(2) $\Omega \xrightarrow{u} \Omega[\partial \log X_0] \xrightarrow{q} C_u \underset{[1]}{\xrightarrow{p_1}} \Omega$:distinguished triangle (by the definition of a distingushed triangle in the Derived category.)

(3) $C_u \cong \Omega$ (homological isomoprhism) (by the construction of the cone.)

(4) $C_u \xrightarrow{p_1} \Omega \to C_{p_1} \underset{[1]}{\to} C_u$ (by the definition of a distingushed triangle in the Derived category.)

(5) $C_{p_1} \cong \Omega[\partial \log X_0]$ (The axiom TR3 of triangulated categories.)

以上、特に後半について、もう少し突っ込んだ議論が待たれるところだが、ここが今の研究の状況である。

1.12. **根本問題.** $\Bbbk_1$ を可換環, $h \in \Bbbk_1$ とする。

非斉次 Weyl 環 $\mathrm{weyl}_{n+1} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle/(\mathrm{ccr})$ (ただし、ccr は交換関係 $[\bar{x}_i, x_j] = h\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad [\bar{x}_i, \bar{x}_j] = 0$) から始める。

weyl_{n+1} の signed degree が 0 のところをとってくる

$$\mathrm{weyl}_{(0)} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle_{(0)} = \Bbbk\langle\{x_i\bar{x}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}\rangle.$$

ただし、signed degree sdeg は 以下で決まる。

変数:	x	$\bar{x}$
sdeg:	1	-1

つぎに、「moment map が 0 のところ」すなわち $\sum_i x_i\bar{x}_i = R$ のところに切る。

$$A = \mathrm{weyl}_{(0)} /(\sum_i x_i\bar{x}_i - R)$$

$\Bbbk_1$ の標数 が $p > 0$ のとき、A の中心は

$$\Bbbk[\{x_i^p\bar{x}_j^p; i, j = 0, \dots, n\}]/(\mathrm{relation})$$

と等しく、その関係式 (relation) は

$$\sum_i x_i^p\bar{x}_i^p = R^p(1 - h^{p-1})$$

で与えられる。

事実 1.12.1. $A = \mathrm{weyl}_{(0)} /(\sum_i x_i\bar{x}_i - R)$ は、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の affine 開集合

$$\{[a_0 : a_1 : \dots a_n], [\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \dots \bar{a}_n]; \sum_i a_i\bar{a}_i \neq 0\}$$

上の coherent sheaf of algebras $\mathcal{A}$ と対応し、$\mathcal{A}$ の各閉点でのファイバーは は全行列環 M_{p^n} と同型である。

根本問題

事実 1.12.1 を参考にして $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の非可換化を構成せよ。とくに、

- 非斉次ワイル環の Spec の「完備化」に留意すること。
- 超変数を用いた「微分形式の非可換版」をきちんと作ること。

Silly computation

「完備化」でこれからやろうとしていることを可換の場合に見てみよう。要するに変数を一つ付け加えて斉次化し、proj を考えるに過ぎない。

多項式環 $B = \Bbbk[X_0, \dots X_n, \bar{X}_0, \dots \bar{X}_n]$

からはじめて、その signed degree が 0 のところをとってくる

$$B_{(0)} = \Bbbk\langle X_0, \dots X_n, \bar{X}_0, \dots \bar{X}_n\rangle_{(0)} = \Bbbk[\{X_i\bar{X}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}].$$

これは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の Segré embedding の像の射影座標環 (あ) である。もう少し詳しく言えば、$(n+1)^2$ 個のあたらしい変数 $\{X_{i,\bar{j}}; 0 \leq i, j \leq n\}$ を用意して、

$$B_{(0)} = \Bbbk[\{X_i\bar{X}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\rangle \ni X_i\bar{X}_j \mapsto X_{i\bar{j}} \in \Bbbk[\{X_{i\bar{j}}\}]$$

を考えると、これに対応する Proj が Segré embedding を与えるのであった。

つぎに、「moment map が 0 のところ」すなわち $\sum_i X_i\bar{X}_i = 1$ のところに切るわけだが、$\sum_i X_i\bar{X}_i$ (Segré embedding で $\sum_i X_{i,\bar{i}}$ に対応する) 自体も (あ) の線形な座標の一つであるから、$\sum_i X_i\bar{X}_i = 1$ は一つの affine piece を取り出していることと同じである。そこで、新しい余分な変数 C をとって、改めて $\mathrm{Proj}(A_{(0)}[C]/(\sum_i X_i\bar{X}_i = C)$ を考えれば、これはもちろん $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ に戻るというわけである。

1.13. **Marsden-Weinstein quotient.** "Marsden-Weinstein quotient" という言葉自体はシンプレクティック幾何学から借りている。その概要については wikipedia の記事

(`https://en.wikipedia.org/wiki/Moment_map`)

を 見ると良い。nlab の記事

`https://ncatlab.org/nlab/show/BV-BRST+formalism`

の Poisson reduction のところも良い。

環 W に対して、その部分集合 S で W (というか $\mathrm{Spec}(W)$) を「制限」したい。W が可換の場合であれば、これは S で生成される W のイデアル $W \cdot S$ でもって剰余環 $W/W \cdot S$ を考えることに該当する。

W が非可換な場合にも、S で生成されるイデアルを考えることはもちろん可能ではあるが、我々のワイル環のように W が単純環の場合などもあり、必ずしも有効であるとは限らない。不確定性原理により二つの変数を同時に正確に定めることは一般には不可能なのだ。

そこで、S で生成される左イデアル $J = W \cdot S$ を 考えて、W における J の idealizer $\mathbb{I}_W(J) = \{a \in W; Ja \subset J\}$ を考える。$\mathbb{I}_W(J)$ は W の元のうち $S = 0$ という制限と「協調的」な元であると考えて良いだろう。そこで $\mathbb{I}_W(J)/J$ を W の S による制限として据えるのである。

環 W に 代数群 G が作用していたとする。実は W の G での商 (Marsden-Weinstein 商と呼ばれる) は上のような「制限」の考え方で得られる、別の言い方をすると Marsden-Weinstein 商 は W は moment map μ による W の「制限」と見ることができることを以下に示そう。

$\mathrm{Spec}(W)$ の G での商空間は W の G-不変環に対応する:

$$\mathrm{Spec}(W)/G \text{ ``=''} \ \mathrm{Spec}(W^G)$$

... と行きたいところである。が、いくつかの座標の固定を放棄した (G-軌道のどこにあるかを決めるのをやめる) かわりに、決定できる元 ("運動量") がある。別の言い方をすれば、$\mu \in W^G$ があって、真にほしいものは

$$\mathrm{Spec}(W)//G = \mu^{-1}(0) \subset \mathrm{Spec}(W^G)$$

である。(ここでは μ は一個のように書いているが複数でもよい。つまり、$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) \in W^k$) いくつかの良い条件のもとで、

$$W^G = \mathbb{I}_W(J), \quad J = W \cdot (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$$

である。

まとめ

- 群の非可換環への作用 から moment map が定まる。
- moment map での「制限」により非可換環の spec の商空間が与えられる。

シンプレクティックの場合に関する補足。

複素ケーラー多様体 X と 実 Lie 群 G の X へのケーラー形式を保つ作用について、

$$X/G_{\mathbb{C}} \cong X//G \qquad (G_{\mathbb{C}} : G \text{ の複素化}).$$

とくに、

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}}/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{A}^{n+1}//S^1 = \mu^{-1}(0)/S^1$$

我々はこの話を「非可換版」にし、なおかつ「超変数を付け加える」つもりである。moment map をどう選ぶかというのは S^1 の作用 (もともとの環 W の $\mathbb{Z}$-grading) をどうとるかに相当し、それは超変数の話を抜きにすれば上記 $\mathbb{P}^n$ の話と一致すべきであろうから、

(1) $\sum_i X_i\bar{X}_i$. 対応する次数付けは、

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	0	0

(2) $k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i$. 対応する次数付けは、

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	1	-1

のいずれかといったところだろう。以下の No.015 で検討する。

1.14. **選択 1: 微分.** 微分形式の理論を考えるにあたって、微分形式の微分をどう扱うかは基本的である。ここでは $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の 2 つの微分を導入したい。まず $\mathbb{A}^{n+1}$ の「座標環」に「form を付け加えた」環 S (仮名) を作りたい。

$\Bbbk_1$ を可換環, $h \in \Bbbk_1$ とする。

(仮説 0.) S は $\Bbbk_1$ 上の super 代数である。余談であるが S の元については super 代数の標準的な記法をもちいる。例えば $[\bullet, \bullet]$ は交換子ではなく super 交換子であり、$\hat{\bullet}$ のように hat は $\bullet$ の parity を表す。

(仮説 1.) 変数 $x_0, \dots, x_n, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n$ は (非斉次) 正準交換関係 **(ccr)** を満たす。つまり、非斉次 Weyl 環 $\mathrm{weyl}_{n+1} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle/(\mathrm{ccr})$ から始める。我々の扱いたい環 S は weyl_{n+1} の拡大環である。

(仮説 2.) S は **2 つの odd 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の作用を受ける**。すなわち、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ はともに S から S への $\Bbbk_1$-線形写像であり、(super) Leibnitz 則

$$\mathfrak{d}(ab) = \mathfrak{d}(a)b + (-1)^{\hat{b}}a\mathfrak{d}b$$

$$\bar{\mathfrak{d}}(ab) = \bar{\mathfrak{d}}(a)b + (-1)^{\hat{b}}a\bar{\mathfrak{d}}b$$

を満たす。($\hat{b}$ は b の parity.)

(仮説 3.) $\mathfrak{d}x_0, \dots \mathfrak{d}x_n$ のことを $e_0, \dots, e_n$, $\bar{\mathfrak{d}}x_0, \dots \bar{\mathfrak{d}}x_n$ のことを $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n$ と書く。 $e_0, \dots, e_n$, $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n$ は **(acr)** を満たす。

$$[e_i, \bar{e}_j]_+ = k_1\delta_{ij}, \quad [e_i, e_j]_+ = 0, \quad [e_i, \bar{e}_j]_+ = 0,$$

(さらに、標数 2 の場合には $e_i^2 = 0, \bar{e}_i^2 = 0$ を仮定する。)

(仮説 4.) **(コーシー・リーマン)** $\bar{\mathfrak{d}}x_i = 0, \mathfrak{d}\bar{x}_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

(仮説 5.) e_i と x_j とはおのおの可換である。同様に $\bar{e}_i$ と $\bar{x}_j$ ともおのおの可換である。

(‘bar 無し’ だけの世界、‘bar 付き’ だけの世界はそれぞれ可換の多項式環上の通常の微分形式の世界である。)

(帰結 6.) x_i と $\bar{e}_i$ とは可換である。これは (ccr) を $\mathfrak{d}$ や $\bar{\mathfrak{d}}$ で作用させてみればわかる。

$$0 = \mathfrak{d}(h\delta_{ij}) = \mathfrak{d}[x_i, \bar{x}_j] = [e_i, \bar{x}_j]$$

等々。

(帰結 7.) 任意の i, j にたいして、

$$0 = \mathfrak{d}[x_i, \bar{e}_j] = [e_i, \bar{e}_j] + [x_i, \mathfrak{d}\bar{e}_j].$$

ゆえに、
$$[x_i, \mathfrak{d}\bar{e}_j] = -\delta_{ij}k_1$$
とくに、$\mathfrak{d}\bar{e}_j (= \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}x_j) \neq 0$.
(仮説 8.) ある k が存在して、$k_1 = hk$, $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}\bar{x}_i = k\bar{x}_i$ $(\forall i)$.
(帰結 8.) $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は「定数倍を除けば inner」である。
$$\mathfrak{d} = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i \bar{x}_i e_i), \qquad \bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i x_i \bar{e}_i)$$
(帰結 9.)
$$[\bar{\mathfrak{d}}, \mathfrak{d}] = \frac{1}{h^2}\,\mathrm{ad}([\sum_i \bar{x}_i e_i, \sum_j x_j \bar{e}_j) = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\mathfrak{d}(\sum_j x_j \bar{e}_j)) = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(k\sum_j x_j \bar{x}_j + \sum_j e_j \bar{e}_j)$$

ここでの結論

$\mathbb{A}^{n+1}$ 上の微分形式全体の空間の非可換対応物として、非斉次 Weyl 環と非斉次 Clifford 環のテンソル積
$$S = \Bbbk_1\langle x_0, \dots, x_n, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n, e_0, \dots, e_n, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n\rangle / (\mathrm{ccr}, \mathrm{acr})$$
をとり、S の微分としては
$$\mathfrak{d} = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i \bar{x}_i e_i), \qquad \bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i x_i \bar{e}_i)$$
を採用する。

(注意)
$$\sum_i \bar{x}_i e_i = \mathfrak{d}(\sum_i x_i \bar{x}_i), \qquad \sum_i x_i \bar{e}_i = \bar{\mathfrak{d}}(\sum_i x_i \bar{x}_i),$$
(補足)
(仮説 8) はまだ唐突に過ぎたかもしれない。実際には、次のような仮説 (8a-c) を立ててそこから (仮説 8) を導くべきだろう:
(仮説 8a) $\mathfrak{d}^2 = 0$, $\bar{\mathfrak{d}}^2 = 0$.
(仮説 8b) $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は「変数ごとに」考えてよい。つまり、もともと n-変数 Weyl-Clifford 代数は 1 変数のもののテンソル積であるが、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ はそれぞれの 1 変数 Weyl Clifford 代数ごとに定義されていて、そのテンソル積として表される。
(仮説 8c) (1)-(7) と (8a,8b) から $\mathfrak{d}\bar{e} = \bar{x} + \mathrm{const.}$ のかたちが得られるが、x 変数の平行移動により原点を調整して、constant の部分は 0 と考える。[この (8c) は定数の数を増やすのを防ぐための便宜上の工夫と言ったほうが良いかもしれないが、このために constant の部分に現れうる元を限定しすぎている可能性もある。]

1.15. **選択 2: moment map.** $\mathbb{A}^{n+1}$ の「form の代数」S が確定した後、今度はそれを「moment map で切らなければ」ならない。幾何学的には、$\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ の submanifold である球面 (S^{2n+1}) を S^1 で割ることに対応する。
この回は moment map としては何をとるべきか議論する。
考え方としては、super な変数を導入する前と同じものを採用して、

(あ)
$$\mu_{(あ)} = \sum_i x_i \bar{x}_i - R$$
が妥当だと思わえるかもしれない。R は定数 ($\Bbbk_1$ の元) で、
$\mathrm{ad}(\mu_{(あ)})$ は定数倍を除いて次のような S の次数付けに対応する。

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	0	0

(あ) による Marsden-Weinstein quotient とは、この degree に関して次数が 0 の S の元の全体を、$\mu_{(あ)} = 0$ という関係式で割った剰余環である。

しかし (あ) を採用するのは我々にとってはさほど嬉しくない。我々の環 A には、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の作用が 許容されなければならない。(あ) を認めると、A では $\sum_i x_i\bar{x}_i = R$ が成り立つはずであるから、両辺を $\mathfrak{d}$ や $\bar{\mathfrak{d}}$ で微分することにより、

$$\sum_i x_i\bar{e}_i = 0, \qquad \sum_i \bar{x}_i e_i = 0$$

を得る。それらによる adjoint をとることにより、任意の $x \in A$ に対して $\mathfrak{d}x = 0, \bar{\mathfrak{d}}x = 0$ が成り立つことになり、面白い議論が期待できない。

いまのところ、(あ) の代わりに

$$\text{(い)} \qquad \mu_{(い)} = k\sum_i x_i\bar{x}_i + \sum_i e_i\bar{e}_i = \tilde{R}$$

が適当だと思われる。$\mathrm{ad}(k\sum_i x_i\bar{x}_i + \sum_i e_i\bar{e}_i - \tilde{R})$ は定数倍を除いて次のような S の次数付けに対応する。

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	1	-1

$\mu_{(い)}$ は $\mathfrak{d}$-closed かつ $\bar{\mathfrak{d}}$-closed であるから $\mu_{(い)}$ に関する剰余環には (あ) に見られたような不具合はない。さらに、$[\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}] = \frac{1}{h}\mathrm{ad}(\mu_{(い)})$ であるから、S の $\mu_{(い)}$ による Marsden-Weinstein quotient では $\mathfrak{d}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$ は可換である。大変都合がいい。

今回の結論

moment map としては

$$k\sum_i x_i\bar{x}_i + \sum_i e_i\bar{e}_i - R$$

を採用する。

コホモロジーの議論は $\{k = 0\}$ の近く以外では面白くなさそうなので、$\Bbbk_1[[k]]$ のような環を係数環に据え、k に関する order を考えて $R = k^\rho$ のような形に限定して議論をすることを目論んでいる。

2. 可換理論による構成

2.17. **開集合 $U, \bar{V}$.** $\mathbb{P}^n$ のアフィン開集合として、$U_i = \{X_i \neq 0\}$ を一つ選ぶ。選んだ index i のことを i_U と書く。

$$U = \{X_{i_U} \neq 0\}.$$

同様に、$\bar{\mathbb{P}}^n$ ($\mathbb{P}^n$ のコピー) のアフィン開集合 $\bar{V}$ も同じように定義する。

$$\bar{V} = \{\bar{X}_{i_{\bar{V}}} \neq 0\}.$$

$X_{i_U}, \bar{X}_{i_{\bar{V}}}$ のことを単に $X_U, \bar{X}_{\bar{V}}$ と書く。つぎの 2 つの層が大活躍する:

$$\Omega^{\bullet\bullet}[\partial\log(\bar{X}_{\bar{V}})]$$
$$\Omega^{\bullet\bullet}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})]$$

番号を入れ換え、$i_U = 0$ としても問題ない。$i_{\bar{V}} = 0$ と置くのは論理的には多少問題があるが、定義体 $\Bbbk$ を拡大しておいて元の数を増やし

ておき、generic な線形変数変換を行えばこの稿にある程度のことは問題なく処理できる。そこで以下は断りなしに $i_U = 0, i_{\bar{V}} = 0$ としているところがある。

2.18. Ω_{sparse}, $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{sparse}}$. $\mathbb{P}^n$ の斉次座標 $X_0, X_1, \ldots, X_n$ を (この稿ではいつものように) とる。

アフィン開集合 $U_j = \{X_j \neq 0\}$ に対して、$x_i^{(j)} = X_i/X_j$ を 局所座標にとる。

$\mathcal{O}^p = \{f^p; f \in \mathcal{O}\}$ と

$$\{(x_i^{(j)})^{p-1} x_i^{(j)}; i = 0, \ldots n\}$$

で生成される Ω の subsheaf を Ω_{sparse} と書く。これは j のとり方によらない。(うまく貼り合っている。)

$\widetilde{\Omega} = \Omega[d\log(X_j]$ の subsheaf として、$\widetilde{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[d\log X_j]$ とおく。これも j によらず、うまく貼り合っている。

$$d\log X_j - d\log X_l = d\log(X_j/X_k) \in \Omega_{\mathrm{sparse}}$$

に注意のこと。

つぎの inverse Cartier operator は Deligne-Illusie-Cartier 理論の大事な点の一つであり、本稿でも大変活躍する。

命題 2.18.1. [1, Th 2.1.9] 標数 p の体上のスキーム S 上スムースなスキーム X に対して、$X^{(p)} = X \times_{S,\mathrm{str},\mathrm{Frob}} S$ とおく。このとき、inverse Cartier operator

$$C_{X/S}^{-1} : \Omega_{X^{(p)}/S} \cong \mathcal{H}(\Omega_{X/S}).$$

は同型である。ただし、C^{-1} は $f \in X^p$ に対して $f \mapsto f^p, df \mapsto f^{p-1}df$ と対応させることにより与えられる。

この定理の右辺は cohomology 類であるが、我々は射影座標によりその lift

$$\hat{C}_{X/S}^{-1} : \Omega_{X^{(p)}/S} \to \Omega_{X/S}$$

が定義され、その像が global な対象 Ω_{sparse} である。その結果、次の命題を得る:

命題 2.18.2.

$$\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \cong \mathcal{H}(\Omega_{\mathbb{P}^n})$$

$$\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \cong \mathcal{H}(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n})$$

言い方を変えれば、$(\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}, 0)$ と $(\Omega_{\mathbb{P}^n}, d)$ とは quasi isom. であり、$(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}, 0)$ と $(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n}, d)$ とも quasi isom. である。

なお、この命題自身は local に (多項式環の話に帰着して) 容易に証明できる。

2.20. 斉次 Weyl-Clifford 代数.

2.20.1. 基礎体 $\Bbbk$, 基礎環 $\Bbbk_1, \Bbbk_2, \Bbbk_3$. 基礎体 $\Bbbk$ とその拡大可換環 $\Bbbk_2$ を固定する。特別の元 $h, k \in \Bbbk_2$. を選んでおき、$\Bbbk_1 = \Bbbk[h], \Bbbk_2 = \Bbbk[h, k]$ とおく。h を 0 に特殊化することにより、「可換の場合」にすぐ帰着できるようにしているのである。後のセクションでは、$\Bbbk$ は標数 $p \neq 0$ の体で、$\Bbbk_1$ は 環 $\Bbbk[h, \frac{1}{1-h^{p-1}}]$ を採用することが多いだろう。

さらに、悪ノリの部類に属するかもしれないが、あとあと C が登場の後は $\Bbbk_3 = \Bbbk_2[C]$ と定義する。

2.20.2. 斉次 *Weyl-Clifford* 代数の定義.

定義 2.20.1. 斉次 Weyl 代数を次のように定める。

$$\mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} = \Bbbk_1\langle C, X_0, X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n\rangle$$

ただし $X_i, \bar{X}_j$ はつぎの正準交換関係 (canonical commutation relations,CCR) を満たす:

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij} \quad \text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i, \bar{X}_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0. \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

C は中心的元である。

上のように、「$\Bbbk$ 上環として $X_1, X_2, \ldots$ で生成される環」という記号を本稿では $\Bbbk\langle X_1, X_2, \ldots\rangle$ とかく。

定義 2.20.2. 斉次 Clifford 代数とは次の代数である。

$$\mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} = \Bbbk_1\langle C, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n\rangle$$

ただし $E, \bar{E}$ たちはつぎの正準反交換関係 (CAR) を満たす:

$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \qquad [E_i, E_j]_+ = 0$$

ここで, C はやはり中心的な元である。.

定義 2.20.3. 非負整数 n, m にたいし、斉次 Weyl-Clifford 代数を次のテンソル積で定義する。

$$\mathrm{WC}_{n+1,m+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} \otimes_{\Bbbk_3} \mathrm{Cliff}_{m+1}^{(h,C,k)}.$$

(ただし、少し上に予告したように、$\Bbbk_3 = \Bbbk_2[C]$ と定義する。) $n = m$ の ときは簡単のため $\mathrm{WC}_{n+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{WC}_{n+1,n+1}^{(h,C,k)}$ と書くことにする。

よく知られている事実 (を斉次化したもの) により、

命題 2.20.4. Weyl_{n+1} は

$$\{X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n} \mid i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

を自由基底に持つ $\Bbbk_3 = \Bbbk_2[C]$ 上の自由加群であり、Cliff_{m+1} は

$$\{E_0^{j_0} E_1^{j_1} E_2^{j_2} \ldots E_n^{j_n} \mid j_1, \ldots, j_n \in \{0, 1\}\}$$

を自由基底に持つ $\Bbbk_3$ 上の自由加群である。当然ながら $\mathrm{WC}_{n,m}$ も $\Bbbk_3$ 上の自由加群であることがわかる。

2.20.3. WC の超代数としての構造. 微分形式の代数と同様に、$X, \bar{X}, C$ は even, $E, \bar{E}$ は odd と考えて WC_{n+1} は超代数の構造をもつ。ただし、$X, \bar{X}, C$ は even, $E, \bar{E}$ は odd と考える。以下、WC に関する記号は超代数としての記号として用いる。たとえば、bracket は super commutator であり、 ad は super adjoint である:

$$\mathrm{ad}(x)(y = [x, y] = xy - (-1)^{\hat{x}\hat{y}} yx$$

($\hat{?}$ は ? の符号)

2.20.4. 元 ε $\bar{\varepsilon}$ と微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$. WC_{n+1} の元 $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ を以下で定義する。

$$\varepsilon = \sum_i \bar{X}_i E_i, \quad \bar{\varepsilon} = \sum_i X_i \bar{E}_i$$

微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ を以下のように定義する。

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{hC} \operatorname{ad} \varepsilon, \quad \bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{hC} \operatorname{ad} \bar{\varepsilon}$$

(一つ前の小節に書いたように ad は super adjoint である。) これらは見かけ上 $\mathrm{WC} \otimes_{\Bbbk_3} \Bbbk_3[\frac{1}{hC}]$ 上の作用素だが、簡単な計算によりこれらの作用素の生成元 $X_?, \bar{X}_?, C, E_?, \bar{E}_?$ での値は WC に入り、super Leibniz rule を満たすことがわかる。よって、それらは 2.20.4 の自由性により WC 上の作用素を定義することが言える。

$$\varepsilon = \mathfrak{d}(\sum_i X_i \bar{X}_i), \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\mathfrak{d}}(\sum_i X_i \bar{X}_i)$$

にも注意しよう。

$x \in \mathrm{WC}$ に対して、

$$[\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}](x) = (\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}} + \bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d})(x) = \frac{1}{hC} \operatorname{ad} \mu_0(x) = -k \operatorname{sdeg}(x) \cdot x$$

である。ただし、 $\mu_0 \in \mathrm{WC}$ は

$$\mu_0 = k \sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i E_i \bar{E}_i.$$

sdeg は signed degree (“bar の数”) である。

変数:	X	$\bar{X}$	E	$\bar{E}$	C
sdeg:	1	-1	1	-1	0

2.21. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ での層 $\mathcal{WC}$ の定義. この小節でも、$\Bbbk_2 = \Bbbk[h, k]$ という略号を使う。$\Bbbk$ は体、h, k は $\Bbbk$ 上代数的独立とは限らない元である。

2.21.1. ステレオ作用、ステレオ加群. 。

斉次 Weyl-Clifford 環 WC_{n+1} に、左から左変数 (無印の X たち) の多項式環 $\Bbbk_2[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ の元、右から 右変数 (bar 付きの変数たちの多項式) 環 $\Bbbk_2[\bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n]$ の元を作用させることを考える。この作用をここでは「ステレオ作用」と呼ぶことにする。WC_{n+1} はステレオ作用により $(2n+1)$ 変数多項式環 $\Bbbk_2[X_0, X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots \bar{X}_n]$ 上の (通常の可換環論的な意味での) 二重次数付き加群と見ることができる。したがってそれは $\mathbb{A}^{n+1} \times \bar{\mathbb{A}}^{n+1}$ 上の加群の層、敷いては (ここから $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$-作用で割って) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層を与える。これを $\mathcal{WC}$ と書く。

WC の構造の導入のしかたにより、$\mathcal{WC}$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層としては環の構造を持つとは言えないが、$\mathrm{char}(\Bbbk) > 0$ のときには可換理論の枠内で $\mathcal{WC}$ の乗法構造を理解することができる。包含写像 $\Bbbk_2[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p] \subset \Bbbk_2[X_0, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n]$ に対応する射影空間の射は同相であるから、それによって $\Bbbk_2[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p]$ に対応する層を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ の部分環の層とみなして、$\mathcal{O}^{(p)}$ と書くことにする。言い換えると $\mathcal{O}^{(p)}$ は relative Frobenius morphism による構造層の direct image である。

$\Bbbk_2[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p]$ は WC の中心に含まれるから、$\mathcal{O}^{(p)}$-上であれば、$\mathcal{WC}$ は環 (正確には、多元環) の構造を持つ。

2.21.2. *sub, quotient* の順番の整理と変更. ここで一旦立ち止まって、この後の方針について少し説明しよう。

斉次 Weyl 環 Weyl から $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の最終的な対象を得るために以下に模式的に書くような 3 段階を踏んだ:

$$\mathrm{WC} \overset{1}{\rightsquigarrow} (\mathrm{WC})_{(0)} \overset{2}{\rightsquigarrow} A = (\mathrm{WC})_{(0)}/(\mu) \overset{3}{\rightsquigarrow} \mathcal{A}$$

以下説明を加えるが、"関数空間" の方を見るか、対応する "spec" のような幾何学的な対象を見るかで sub と quotient の役割が反対になるので気をつけなければならない。

"関数空間" のレベルで言えば以下の通り:

step 1. $\mathbb{G}_m$ の反対角作用 による不変部分をとる

反対角作用とは $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1} \ni (v, w) \mapsto (cv, c^{-1}w)$ $(c \in \mathbb{G}_m)$ に対応する作用で、

$$X_i \mapsto cX_i, \quad \bar{X}_i \mapsto c^{-1}\bar{X}_i, \quad E_i \mapsto cE_i, \quad \bar{E}_i \mapsto c^{-1}\bar{E}_i, \quad C \mapsto C$$

と書いてもよい。可換な (かつ super 変数を除いた) 場合で言えば反対角作用による不変環 ($\{X_i\bar{X}_j\}$ で生成される環) は Segré embedding を与えることに注意。

step 2. moment element μ で割る。step1+ step2 が Marsden Weinstein quotient である。

step 3. C を付け加えて斉次化した分を取り返すため、A に対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras を考える。

対応する幾何学的な対象で同じことを述べれば、次のような具合である:

step 1. $\mathbb{G}_m$ の反対角作用でわる。

step 2. moment element $\mu = 0$ で切る。

step 3. A に対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras を考え、cone から $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ に落ちる ($\mathbb{G}_m$ で割る。)

いずれにせよ、手に入るのは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras $\mathcal{A}$ である。step 1 を step 2 の前に置いているのが Marsden-Weinstein quotient の自慢で、$(\mathrm{WC})_{(0)}$ の中では μ は比較的小さなイデアルを生成する (今考えている場合で言えば、μ は $(\mathrm{WC})_{(0)}$ の center に属する。) のである。

$\mathcal{A}$ を得るためには、上の手順を入れ換えて、次のようにすることも可能である。

WC からはじめて、

step $1' + 3'$: $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ で割る。

つまり、WC を ステレオ加群とみて、それに対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras WC を考える。

step $2'$: $\mu = 0$ で切る。

こっちのほうがよほどスッキリしている。step $1'$ を先にこなしているので、step $2'$ も安全に行える。と、いうわけで、以下ではこの方針で考えることにする。

また、moment map μ として幾とおりかが考えられるわけだが、これも step $2'$ を後回しにすることで最後に考えることができる。

2.22. $\mathcal{WC}$ の構造.

2.22.1. $\tilde{\Omega} = \pi_*(\Omega)^{\mathbb{G}_m}$. このシリーズでは 「$\tilde{\Omega}$」 とかおなじものだが、もう少し正確に、「$\pi_*(\Omega)^{\mathbb{G}_m}$」と表記されるものが度々出てくる。本質的には同じものであり、$\mathbb{P}^n$ 上の coherent sheaf で、代数層の構造を持つものである。記号も以下述べるようにほぼ妥当なものだが、いろいろなことが少しづつ省略されているので、わかりにくいものになってしまっている。ここでハッキリと書いておくことにする。

定義 2.22.1. (1) $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ のことを以下 $\mathbb{A}^{n+1}_o$ と書く。

(2) 自然な射影 $\mathbb{A}_o^{n+1} \to \mathbb{P}^n$ を π と書く。
(3) $\mathbb{A}_o^{n+1}$ のドラム複体を $\Omega_{\mathbb{A}_o^{n+1}}$ と書く。
(4) $\mathbb{P}^n$ 上の層 $\pi_*\Omega_{A_o^{n+1}}$ のことを省略して $\pi_*\Omega$ と書く。
(5) $\pi_*\Omega$ には 自然な $\mathbb{G}_m$ 作用があるから、それによる不変セクションのなす層を $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ と書く。

2.22.2. $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の座標による表現. $\mathbb{A}^{n+1}$ の座標 ($\mathbb{P}^n$ の斉次座標) $X_0, X_1, \ldots, X_n$ を取り、π を

$$\pi : \mathbb{A}_o^{n+1} \ni (X_0, X_1 \ldots, X_n) \mapsto [X_0, X_1 \ldots, X_n]$$

と書こう。$\{X_0 \neq 0\}$ なる $\mathbb{A}^{n+1}$ の開集合に制限して考えると、 π は

$$(X_0, X_1, \ldots, X_n) \mapsto [1 : X_1/X_0, \ldots X_n/X_0]$$

と書けるから、π は下のように分解して考えることができる。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^n & \hookrightarrow & \mathbb{A}^{n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n \\
\cup & & \cup & & \cup \\
(c, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) & \mapsto & (c, cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) & \mapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{array}$$

0 の代わりに一般の添字 i_U を用いても同様であり、ここからすぐにわかることは:

local な $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ の表現

$\mathbb{P}^n$ 上の層 $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ は super commutative な 環の層であって、

$$(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \cong \Omega_{\mathbb{P}^n}[X_U^{-1} dX_U].$$

$\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ の満たす完全系列

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\iota} (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\mathrm{Int}_{\mathrm{Euler}}} \Omega_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

ただし、ι は form の引き戻しから自然に定まる単射、$\mathrm{Int}_{\mathrm{Euler}}$ は Euler operator との interior product である。

命題 2.22.2. 次のことはよく知られている。(係数環はどれでもいいので一番一般的な $\mathbb{Z}$ に取っている。

$$H^\bullet(\mathbb{P}^n, \Omega^\bullet) \cong \mathbb{Z}[L]/(L^{n+1})$$

Exact sequence から次を得る: degree がそれぞれ 0 と n である自由生成元 v_0, v_n があって、

$$H^\bullet(\mathbb{P}^n, \widetilde{\Omega^\bullet}) \cong \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_n.$$

2.22.3. $\mathcal{WC}$ の構造. このシリーズでは前変数、後ろ変数、 2 つの $\mathbb{P}^n$ が出てくる。そこで、一方の $\mathbb{P}^n$ の射影座標を $X_0, \ldots, X_n$, その外微分を ∂, もう一方の $\mathbb{P}^n$ の射影座標を $\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n$, その外微分を $\bar{\partial}$ と書くことにする。

Weil-Clifford 環の積構造の入れ方により、WC に対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{WC}$ には $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の前変数と後ろ変数のコピーがそれぞれ subalgebra として入っている。2 つそれぞれは subalgebra である (積について閉じている) が、2 つの subalgebra 相互の交換関係は一般には難しいことに注意が必要である。

とにかくも, $\mathcal{WC}$ は $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ (前変数) を左から、$\pi_*\bar{\Omega}^{\mathbb{G}_m}$ (後変数) を右から掛ける意味で

$\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m} \boxtimes \pi_*\bar{\Omega}^{\mathbb{G}_m}$ 上の「ステレオ加群」の構造を持つ。

定理 2.22.3. $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m})$ 上のステレオ加群として $\mathcal{WC}$ は locally free であり、

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \big((\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m})(-l,-l\big)$$

2.23. **degree** fdeg **of elements of WC as differential forms.** 微分形式としての次数を fdeg で書くことにする。すなわち、fdeg を以下で定義する。

変数	X_i	$\bar{X}_i$	E_i	$\bar{E}_i$	k	C
fdeg	$(0,0)$	(0,0)	(1,0)	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$

あとで見るように、fdeg は WC は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上のある種の微分形式の全体の層の作用 (“ステレオ作用”) をうけ、fdeg は微分形式の次数と協調的である。

2.25. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ **での層** $\mathcal{A}$**,** $\mathfrak{A}$ **と** $\mathfrak{WC}$ **の定義.** $\mathcal{A}$ は $\mathcal{WC}$ に $\mu_{(k,0)} = C$ を課した環として定義したい。

$$\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{WC}/(\mu_{(k,0)} - C)$$

が、

$$k^p \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p = \mu_{(k,0)}^p - (khC)^{p-1}\mu_{(k,0)} = k^p(1-h^{p-1})C^p$$

で、必然的に $k^p((\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p) - (1-h^{p-1})C^p) = 0$ を得る。

そこで我々は更に $(\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p) - (1-h^{p-1})C^p) = 0$ を課した環を補助的に考えることにしよう。つまり、

$$\mathfrak{A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{WC}/(\mu_{(k,0)} - C, \sum_i X_i^p\bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p) \cong \mathcal{A}/(\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p)$$

と定義することにする。ついでに、

$$\mathfrak{WC} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{WC}/(\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p)$$

と定義しておく。要するに、イデアル $(\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p)$ で割って、 C^p を消去できるようにしたものを fraktur で書いた記号のもので表そうというわけである。これらは以下で必須というわけではなさそうだが、一般の射影多様体を考えるための試験台として使える。

$$\mathfrak{WC} = \bigoplus_{l=0}^{p-1} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}(-l,-l)$$

※ $(-l,-l)$ は serre twist の意味だが、$\mathcal{O}^{(p)}$ 上ではなく $\mathcal{O}$ 上の Serre twist のいみである。

2.47. **homology 代数的考察 (無限小の場合).** $\mathcal{A} = \mathcal{WC}/(\mu_1)$ であった。

$0 \to \mathcal{WC}(-1,-1) \overset{\mu_1\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{A} \to 0$:exact.

$\mu_1\times$ の cone を考えれば、これは $\mathcal{A}$ と homological に 同型。

さらに、$0 \to \mathcal{WC}(-1,-1) \overset{\mu_1\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{A} \to 0$ と $0 \to \mathcal{WC}(-1,-1) \overset{C\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{A} \to 0$ とは homotopy 同値 (ε が $\mu_1 - C = \mu_0$ のホモトピーを与える:

$$\mu_1 - C = \mu_0 = \bar{\mathfrak{d}}\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}\bar{\mathfrak{d}}$$

よって、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{WC}/(C)$ とは quasi isomorphic ということがわかる。$\mathcal{WC}/(C) \cong \Omega[\partial\log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\partial}\log(\bar{X}_0)]$ であるから、$\mathcal{A}$ の $\bar{\mathfrak{d}}$-cohomology と $\Omega[\partial\log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\mathfrak{d}}\log(\bar{X}_0)]$ の $\bar{\mathfrak{d}}$-cohomology (ただし $\bar{\mathfrak{d}}$ は通常想起するものとは少し違う) とは同型である。

この考察では、h, k に関する特別の考察が必要なくなっていることに注意する。

20. 整理

20.230. **定義へのリンク.** (書きかけである。)

定義 20.230.1. 基礎体 $\Bbbk$, 定義環 $\Bbbk_1, \Bbbk_2, \Bbbk_3$ の定義。

$\Bbbk$ は体。 $\Bbbk \subset \Bbbk_1 \subset \Bbbk_2 \subset \Bbbk_3$ である。ここで $\Bbbk_1 \ni h$. $\Bbbk_1$ は $h \to 0$ の議論を可能にするために用いられる。他方 $\Bbbk_2 = \Bbbk_1[k]$, $\Bbbk_3 = \Bbbk_1[k, C]$ は本質的なものではなく、書く字数を若干楽にするために補助的に用いる。

定義 20.230.2. 斉次 Weyl 代数 (WC) の定義. 2.20.1 の定義 (2.20.1) を見よ。

k の扱いについて。

この節では、 k を"ファイバー側" の変数として取り扱う。つまり、$\mathcal{WC}[k]$ を $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)_{\Bbbk_1}$ 上の層とみなし、その構造について議論する。

20.230. **$\widetilde{\Omega}$ の取扱。.** $\Omega, \tilde{\Omega}$ の定義は 2.22.1 にある。ただし、k をカウントしておかないと $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の作用で閉じないので、$\Omega[k]$, $\widetilde{\Omega[k]}$ という記号を併用して k の存在をあからさまにすることにする。

$\bar{\mathfrak{d}}$-complex $(\widetilde{\Omega[k]}, \bar{\mathfrak{d}})$ は次の補題によって簡易化できる。

命題 20.230.1. $\bar{\mathfrak{d}}$-complex $(\widetilde{\Omega[k]}, \bar{\mathfrak{d}})$ は $(\Omega, 0)$ と quasi isomorphic である。つまり $D^+(\mathrm{Qcoh}(\mathbb{P}^n))$ の object として同型である。ただし、ここの Ω は $(\Omega[k])/(k)$ と同一視したものを

$$\Omega[k] = \Omega \oplus k\Omega[k]$$

という直和分解することで $\widetilde{\Omega[k]}$ の subsheaf と考えたものである。

Proof. $x = f + (\partial \log X_0)g$ に対して、$\bar{\mathfrak{d}}x = -kg$. ゆえに、$\widetilde{\Omega[k]}$ の $\bar{\mathfrak{d}}$-cocycle は Ω で、$\bar{\mathfrak{d}}$-coboundary は $k\Omega$ である。

□

WC のなかで X, E (無印、左) 変数だけ、あるいは $\bar{X}, \bar{E}$ (bar, 右) 変数だけ考えると super 可換な環をなし、それぞれ $\mathbb{P}^n$ 上の層 $\tilde{\Omega}, \tilde{\bar{\Omega}}$ を与える。言い換えると、WC に「左変数は左から、右変数は右から」作用させることにより $\tilde{\Omega}^\bullet \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}^\bullet$ の作用を持つような $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の加群の層 $\mathcal{WC}$ があたえられる。$\mathcal{WC}$ へのこの作用をステレオ作用、$\mathcal{WC}$ 自身のようにステレオ作用をもつ加群をステレオ加群と呼ぶことにする (2.22)。

定義 20.230.2. $\alpha \in \Bbbk_2$ に対して、$\mu^{(\alpha)} = \alpha C - (\sum_i X_i \bar{X}_i + k \sum_i E_i \bar{E}_i)$ とおく。

$\mu^{(\alpha)}$ はステレオ作用と可換であり、$\mu^{(\alpha)}$ は $\mathcal{WC}$ のイデアルを生成する。もう少し詳しく言うと、$\mathcal{WC}(-1,-1) \cdot \mu^{(\alpha)}$ は $\mathcal{WC}$ のイデアルである。

定義 20.230.3 (2.25)**.**

$$\mathcal{A} = \mathcal{WC}/(\mu^{(k)})$$
$$\mathfrak{A} = \mathcal{WC}/(\mu^{(k)}, \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1}C^p))$$
$$\mathfrak{WC} = \mathcal{WC}/(\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1}C^p))$$

と定義する。

20.250. **主定理の陳述.** 以下では $\Omega^\bullet[\partial\log(X_U)]$ のことを面倒なときは $\widetilde{\Omega}^\bullet$ と書くことにする。(定義**??**)

定理 20.250.1. 前小節の仮定のもとで、斉次 Weyl-Clifford 環 WC は、ステレオ作用を経由して、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の quasi coherent sheaf $\mathcal{WC}$ を定義する。$\mathcal{WC}$ の quotient module として $\mathcal{A}$ が定義される。これらは $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ を odd 微分として持つ doule complex でもある。

以下 $\Bbbk$ の標数 は $p > 0$ であるとする。

(1) $\mathcal{WC}, \mathcal{A}$ は $\mathcal{O}^{(p)}$ 上の代数の構造も持つ。それらの quotient algebra として $\mathfrak{A}, \mathfrak{WC}$ が定義される。
(2) $\mathcal{WC}, \mathcal{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{WC}$ は odd 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ をもつ double complex である。
(3) ステレオ加群としては、$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l\geq 0} \widetilde{\Omega^\bullet[k]} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]} \otimes (\mathcal{O}(-l,-l))$
(4) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex としては、$(\widetilde{\Omega^\bullet[k]}, \bar{\mathfrak{d}}) \cong (\widetilde{\Omega^\bullet[k]}, -kI_0)$, $(\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]}, \bar{\mathfrak{d}}) \cong (\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]}, \bar{\partial})$. ただし I_0 は Euler vector field $\sum_i X_i d/dX_i$ との interior product.
(5) $\bar{\mathfrak{d}}$-hyper cohomology 群の層は以下のように与えられる。
 (i) $\mathcal{WC}$ について。

$$(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}), \mathfrak{d}) \cong (\Omega^\bullet, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}], 0)$$
$$\overset{\mathfrak{d}-\mathrm{q.i}}{\sim} (\bigoplus_{l\geq 0} (\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}], 0)$$

とくに、

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC})) \cong \Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}]$$

$$R^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}), \mathfrak{d}) \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} H^\bullet(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}}(-lp, -lp))$$

 (ii) $\mathcal{A}$ について。

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}), \mathfrak{d}) \cong& (\Omega^\bullet, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}, 0) \\ &\oplus (\widetilde{\Omega}_{(k=0)}, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}, 0) \\ \overset{\mathfrak{d}-\mathrm{q.i}}{\sim}& (\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}}, 0) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}, 0) \\ &\oplus (\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)}, 0) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}, 0)\end{aligned}$$

とくに、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A})) \cong& \Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)} \\ &\oplus \widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^\bullet\Gamma(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A})) \cong& H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}) \\ &\oplus \bigoplus_{l=1}^{\infty} H^\bullet(\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})(-lp, -lp))\end{aligned}$$

 (iii) $\mathfrak{WC}, \mathfrak{A}$ について。

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC})) \cong \mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A})) \cong \Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}$$

$$R^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC}), \mathfrak{d}) \cong R^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A}), \mathfrak{d}) \cong H^\bullet(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})$$

(6) $\mathbf{d} = \mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}$ に関して、

$$(\mathcal{WC}, \mathbf{d}) \overset{q.i}{\sim} \bigoplus_{l \geq 0} ((\Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \otimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{\text{sparse}}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})(-lp, -lp)), 0)$$

ゆえに、

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{WC}, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l \geq 0} (\Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \otimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{\text{sparse}}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})(-lp, -lp))$$

$$R^i\Gamma(\mathcal{WC}, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l \geq 0} R^i\Gamma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{\text{sparse}}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})](-lp, -lp))$$

20.260. **主定理の証明.** (1)-(4) は今までの整理である。

全体を通じて、$\mathcal{F}_1 \boxtimes_? \mathcal{F}_2$ と書いているやつは $\pi_1^*\mathcal{F}_1 \otimes_? \pi_2^*\mathcal{F}_2$ のことである。大抵の場合係数環 ? は $\mathcal{O}^{(p)}$ であって、その場合は省略する。

さて、(5) を証明しよう。$\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}$ は derived category を経由するから、さしあたって derived category (graded $\mathfrak{d}$-complex からなる abel 圏の derived category) で考える。

(i)

$c_{U\bar{V}} = X_U^{-1} C \bar{X}_{\bar{V}}$ とおく。まずこの $c_{U\bar{V}}$ のさばき方を考えよう。直和分解

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l \geq 0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\mathbb{k}_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c^l_{U\bar{V}} \tag{DS}$$

の存在に注意する。

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{d}} c^l_{U\bar{V}} &= \bar{\mathfrak{d}}(X_0^{-l} C^l \bar{X}_0^{-l}) \\
&= X_0^{-l} C^l \cdot (-l) \bar{X}_0^{-l-1} \bar{E}_0) \\
&= -l X_0^{-l} C^l \bar{X}_0^{-l} X_0^{-1} E_0 \\
&= -l c^l_{U\bar{V}} (\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))
\end{aligned}$$

とくに $\bar{\mathfrak{d}}$ は直和分解 (DS) を保つ。

$\alpha = \alpha_1 + (\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_2$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c^l_{U\bar{V}}) = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 \\
&\quad - l(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_1 = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \bar{\mathfrak{d}}\alpha_1 = 0 \\ \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 = -l\alpha_1. \end{cases}
\end{aligned}$$

とくに、$l \neq 0 \pmod p$ ならば、

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c^l_{U\bar{V}}) = 0 \\
\Longrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{-1}{l} \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 \\
\Longrightarrow\ &\alpha c^l_{U\bar{V}} = (\frac{1}{l})(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_2) c^l_{U\bar{V}} \\
&\qquad = \bar{\mathfrak{d}}(\frac{1}{l} \alpha_2 c^l_{U\bar{V}})
\end{aligned}$$

つまり、$l \neq 0 \pmod p$ の部分は $\bar{\mathfrak{d}}$ コホモロジーに関与しない。言い換えると、$\mathcal{WC}$ は $\bigoplus_{l\geq 0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\mathbb{k}_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^{pl}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$-quasi isomorphic である。

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^{l} \overset{q.i.}{\sim} \bigoplus_{l=0}^{\infty} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^{pl}$$

右変数に Deligne-Illusie-Cartier 理論を用いる。$(\widetilde{\bar{\Omega}[k]}, \bar{\partial}) \cong (\widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}, 0)$ (homological isom.) $\widetilde{\bar{\Omega}[k]}$, $\widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}$ はどちらも $\mathcal{O}^{(p)}[k]$ 上 flat であるから、それ自身の flat resolution であり、ここに現れる $\otimes$ ($\boxtimes$ に隠れているが...) はじつは $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ であるとみなせる。(とくに derived category の枠内で処理できる。)

$$\mathcal{WC} \overset{q.i}{\sim} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}]$$

$\widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}$ は $\bar{\partial}$ が 0 に等しい complex であり、つまりは似たようなものの直和である。flatness により tensor 積 と cohomology は交換できて、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}) &\cong \mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\widetilde{\Omega[k]}) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}] \\
&\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}] \\
&\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}] \\
&\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})_{(k=0)}[c_{U\bar{V}}^{p}]
\end{aligned}$$

ただし、gr をとった時点で k の上の complex への作用は 0 と等しくなる。

(ii) $\mathcal{WC}/(kC-\mu_0) \overset{q.i.}{\sim} \mathrm{Cone}(\mathcal{WC}[1] \overset{kC-mu_0}{\to} \mathcal{WC})$ であり、$\mu_0 = \bar{\mathfrak{d}}(\mathfrak{d}(F))$ $F = \sum_i X_i \bar{X}_i)$ であるから、$\mathcal{WC}[1] \overset{kC-mu_0}{\to} \mathcal{WC})$ は $\mathcal{WC}[1] \overset{kC}{\to} \mathcal{WC})$ と $\bar{\partial}$-homotopic である。($\mathfrak{d}^2 = 0$ により、homotopy $\mathfrak{d}(F)$ は $\mathfrak{d}$ と super 可換であることに注意。) よって、$\mathcal{WC}/(kC-\mu_0) \overset{q.i.}{\sim} \mathrm{Cone}(\mathcal{WC}[1] \overset{kC}{\to} \mathcal{WC}) \overset{q.i.}{\sim} \mathcal{WC}/(kC)$ である。つまり、$\mathcal{A}$ の代わりに $\mathcal{WC}/(kC)$ を考えて良い。local に言えば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{WC}/(kC) &\cong \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]} \oplus \bigoplus_{l>0} (\widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}/(k)) c_{U\bar{V}}^{l} \\
&\overset{q.i.}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}/(k) \oplus \bigoplus_{l>0} (\widetilde{\Omega} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}}_{\text{sparse}}) c_{U\bar{V}}^{l} \\
&\overset{q.i.}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}/(k) \oplus \bigoplus_{l>0} (\widetilde{\Omega} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}}_{\text{sparse}}) c_{U\bar{V}}^{l} \\
&\overset{q.i.}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}/(k) \oplus \bigoplus_{l>0} (\widetilde{\Omega} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}}_{\text{sparse}}) c_{U\bar{V}}^{pl}
\end{aligned}$$

(iii)$\mathcal{A}$, WC に現れる sheaf はすべて $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上 flat であり、言い換えると $\otimes_{\mathcal{O}^{(p)}}$-acyclic である。したがって、全体に $\otimes(\textit{something})$ してよく、

$$\mathfrak{W}C \overset{q.i.}{\sim} \bigoplus_{l\geq 0}(\Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})_{(k=0)}[c^p_{U\bar{V}}]) \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\mathcal{O}^{(p)}/(C^p-(1-h^{p-1})F^p))$$
$$\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})_{(k=0)}$$

(iv) 同様にして、

$$\mathfrak{A} \overset{q.i.}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}/(k)$$

(6) は やはり Deligne-Illusie-Cartier 理論の結果である。
(7) は (6) からすぐに従う。
(8) d についても同様である。
$b_U = \partial \log(X_U)), \bar{b}_{\bar{V}} = \bar{\partial}\log(\bar{X}_0))$ と書く。$d(b_U + \bar{b}_{\bar{V}}) = 0$ に注意。
$\alpha \in \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}$ に対して、

$$\alpha = \beta_0 + (b_U + \bar{b}_{\bar{V}})\beta_1$$

$(\beta_0, \beta_1 \in \Omega \boxtimes \bar{\Omega}[k, b_U])$ と書く。

$$\begin{aligned} d(\alpha c^l_{U\bar{V}}) =&(d\beta_0 - (b_U + \bar{b}_{\bar{V}})d\beta_1)c^l_{U\bar{V}} - l(b_U+\bar{b}_{\bar{V}})\beta_0 c^l_{U\bar{V}} \\ =&(d\beta_0)c^l_{U\bar{V}} + (b_U + \bar{b}_{\bar{V}})(-d\beta_1 - l\beta_0)c^l_{U\bar{V}} \end{aligned}$$

$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は (したがって その和の d も) $b_U, \bar{b}_{\bar{V}}$ の数を増やさない。よって、$(b_U + \bar{b}_{\bar{V}})$ の係数を比較することにより、次を得る。

$$d(\alpha c^l_{U\bar{V}}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d\beta_0 = 0 \\ d\beta_1 = -l\beta_0 \end{cases}$$

結局、$p|l$ であるような項以外は $c^l_{U\bar{V}}$ の項は d-コホモロジーに関与しない。

$p|l$ の場合には、$c^l_{U\bar{V}}$ は d-closed であり、$\alpha(k), \beta(k) \in \Omega \boxtimes \bar{\Omega}$ にたいして、

$$\begin{aligned} &d(b_U\alpha(k) + \beta(k)) = 0 \\ \Leftrightarrow&(-b_U d\alpha(k) + k\alpha(k) + d\beta(k) = 0 \\ \Leftrightarrow&\begin{cases} d\alpha(k) = 0 \\ k\alpha(k) + d\beta(k) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

β の k に関する定数項以外は効かない。d-closed を d-exact で割ると、出てくるものは $\mathcal{H}(\Omega \boxtimes \bar{\Omega})$ と等しい。ここで、Deligne-Illusie-Cartier 理論を使えば、結論として次を得る:

$(\bigoplus_{l\geq 0} \Omega_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}(-pl, -pl), d)$ は $(\mathcal{WC}, d)$ と quasi isomorphic.

20.262. **証明のヒント集.**

20.262.1. c_x のサバキ方. $c_x = X_0^{-1}C\bar{X}_0^{-1}$.

(DS) $$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l\geq 0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\mathbb{k}_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c^l_x$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{d}}c_x^l &= \bar{\mathfrak{d}}(X_0^{-l}C^l\bar{X}_0^{-l})\\ &= X_0^{-l}C^l\cdot(-l)\bar{X}_0^{-l-1}\bar{E}_0)\\ &= -lX_0^{-l}C^l\bar{X}_0^{-l}X_0^{-1}E_0\\ &= -lc_x^l(\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\end{aligned}$$

とくに $\bar{\mathfrak{d}}$ は 直和分解 (DS) を保つ。

$\alpha = \alpha_1 + (\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\alpha_2$ に対して、

$$\begin{aligned}&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c_x^l) = 0\\ \Leftrightarrow&(\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\alpha = 0\\ \Leftrightarrow&(\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\alpha = 0\\ \Leftrightarrow&(\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\bar{\mathfrak{d}}\alpha_2\\ &\quad - l(\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\alpha_1 = 0\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}\bar{\mathfrak{d}}\alpha_1 = 0\\ \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 = -l\alpha_1.\end{cases}\end{aligned}$$

とくに、$l \neq 0 \pmod p$ ならば、

$$\begin{aligned}&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c_x^l) = 0\\ \Longrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{-1}{l}\bar{\mathfrak{d}}\alpha_2\\ \Longrightarrow\ &\alpha c_x^l = (\frac{1}{l})(\bar{\partial}\log(\bar{X}_0))\alpha_2)c_x^l\\ &\qquad = \bar{\mathfrak{d}}(\frac{1}{l}\alpha_2 c_x^l)\end{aligned}$$

つまり、$l \neq 0 \pmod p$ の部分は $\bar{\mathfrak{d}}$ コホモロジーに関与しない。言い換えると、$\mathcal{WC}$ は $\bigoplus_{l\geq 0}\widetilde{\Omega[k]}\boxtimes_{\mathbb{k}_1[k]}\widetilde{\bar{\Omega}[k]}c_x^{pl}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$-quasi isomorphic である。

20.262.2. *The element* k. 主に左辺の変数 (左の $\mathbb{P}^n$) について考える。

k は local には $\bar{\mathfrak{d}}$-exact である。

$$k = \bar{\partial}\log(X_0))$$

したがって、global にも $\bar{\mathfrak{d}}$-closed ではある (当然だが。)

しかし、k は global には $\bar{\mathfrak{d}}$-exact ではない。

Čech cohomology レベルで言えば、これは、k の積分 $\partial\log(X_0)$ の差異のなす $\{\partial\log(X_i/X_j)\}_{ij} = \{x_{ij}^{-1}\mathfrak{d}x_{ij}\}_{ij}$ という 1-form の Čech cocycle である。

20.262.3. *d-cohomology.* $b_0 = \partial\log(X_0)),\ \bar{b}_0 = \bar{\partial}\log(\bar{X}_0))$ と書く。

$$d(\alpha c_x^l) =(d\beta_0 - (b_0+\bar{b}_0)d\beta_1)c_x^l - l(b_0+\bar{b}_0)\beta_0 c_x^l$$

$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ (したがって その和の d も) は $b_0, \bar{b}_0$ の数を増やさない。よって、

$$d(\alpha c_x^l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d\beta_0 = 0\\ d\beta_1 = -l\beta_0\end{cases}$$

結局、$p|l$ の時以外は c_x^l の項は d-コホモロジーに関与しない。

$d(b_0\alpha(k) + \beta(k) = 0 \Leftrightarrow (-d\alpha(k) + k\alpha(k) + d\beta(k) = 0 \Leftrightarrow d\alpha(k) = 0$ and $k\alpha(k) + d\beta(k) = 0$.

β の k に関する定数項以外は効かない。d-closed を d-exact で割る $->\mathcal{H}(\Omega\bar{\Omega})$

結論: $(\bigoplus_{l\geq 0}\Omega_{\mathrm{sparse}}\boxtimes\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}(-pl,-pl),d)$ は $(\mathcal{WC},d)$ と quasi isomorphic.

20.265. **spectral sequence に関する補遺.** 本稿では本来「derived category の derived category」のようなものを使いたいところで、spectral sequence を使ってしのいでいる。この節では簡単に復習して、本稿で必要なことについてまとめておくことにする。

(あ) $\mathbb{R}F(M)$

$M\to I^\bullet$ なる injective resolution をとって、ここに functor F をかます。

$\mathbb{R}F(M)=(F(I^\bullet))_{d_1}$

なる derived functor を得る。そのコホモロジーは

$R^iF(M)=H^i_{d_1}(F(I^\bullet))$

である。

(い) $\mathbb{R}F(M^\bullet)$

ここから本番になる。 $M^\bullet\to I^{\bullet\bullet}$ を piece-wise injective resolution とする。その意味は、

(1) 各 i に対して、$I^{i,\bullet}$ は各 M^i の injective resolution.
(2) M の微分 $d=d_1$ も lift しておく。(up to homotopy で unique に存在。)
(3) d_1 と d_2 とは可換。(になるように選ぶ)

そのような ものの存在は homology 代数の教科書なら大抵載っているぐらいによく知られている。$M^\bullet\to\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet})$ は quasi isom であり、そこに F をかまして

$\mathbb{R}F(M^\bullet)=(F(\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet})))$

を得る。そのコホモロジーは

$R^iF(M^\bullet)=H^i_{d_1}(F(\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet})))$

である。

(う) $RF(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$

$M^{\bullet\bullet}\to I^{\bullet\bullet\bullet}$

piece-wise injective resolution.

その意味は:

(1) 各 i,j について、$(I^{i,j,k},d_3)_k$ は $M^{i,j}$ の injective resolution.
(2) d_1 と d_2 は反可換.
(3) d_1 や d_2 と d_3 も反可換。

◎ piece-wise injective resolution の作り方: 各 j に対して、$(M^{\bullet j},\partial)$ を ∂-chain complex のなす category の object と見て、piece-wise injective resolution を計算。$\bar{\partial}$ の lift もして、

$(I^\bullet,\partial)^{j,\bullet}$ を作る。

$(\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet\bullet})$: $(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$ の object wise injective resolution.

$\mathrm{Tot}_{123}(I^{\bullet\bullet\bullet})$: $(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$ と quasi isomorphic.

$F(\mathrm{Tot}_{123}(I^{\bullet\bullet\bullet}))=\mathbb{R}F(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$

$H^iF(\mathrm{Tot}_{123}(I^{\bullet\bullet\bullet}))=R^iF(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$

(え) $(M^{\bullet\bullet}):(M,d_1)^\bullet$ と考える。つまり、d_1-graded module の d_2-chain complex と考える。

$(M^\bullet,d_1)^\bullet\to(I^\bullet,d_1)^{\bullet\bullet}$: piecewise injective resolution.

$(M^\bullet,d_1)$ の形のものの 間の map は、injective resolution の あいだの map に up to homotopy で unique に lift できる。

よって、 $H_{d_2}(I^{\bullet,\bullet,\bullet})$ は $H_{d_2}(M)$ の injective resolution と同じに取れる。

$R^iF(H_{d_2}(M)) \cong H^i(F(\mathrm{Tot}_{1,3}(H_{d_2}(I^{\bullet,\bullet\bullet})))) = H^i(\mathrm{Tot}_{1,3}(H_{d_2}(F(I^{\bullet,\bullet\bullet})))) = H^iH_{d_2}(\mathrm{Tot}_{1,3}(F(I^{\bullet,\bullet\bullet})))$

(う) と (え) から、$F\,\mathrm{Tot}_{1,3}(I^{\bullet,\bullet,\bullet})$ の H_{1+2} と H_1H_2 の 2 つに derived functor としての意味がつき、spectral sequence

$$E_2 = R^iF(H^j_{d_2}(M)) \implies E_\infty = R^{i+j}F(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$$

が存在することがわかる。

20.266. 我々の spectral sequence.

$$\bigoplus_l H^l(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega \otimes \tilde{\bar{\Omega}}) = \bigoplus_{l,m} H^l(\mathbb{P}^n, \Omega) \otimes H^m(\mathbb{P}^n, \tilde{\bar{\Omega}}) \cong \Bbbk[L] \otimes \Bbbk[v_n]$$

(L は次数 2 であって $L^{n+1} = 0$, v_n は次数 $2n$ であって $v_n^2 = 0$ を満たす。) だから、

$$\sum_l \dim(H^l(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega \otimes \tilde{\bar{\Omega}})) = 2n + 2.$$

一方、$M = \oplus_l R^l\Gamma(\widetilde{\Omega \otimes \bar{\Omega}}, d)$ とおく。

$$0 \to \Omega \otimes \bar{\Omega} \to \widetilde{\Omega \otimes \bar{\Omega}} \to \Omega \otimes \bar{\Omega} \to 0 \quad : \text{exact}$$

ゆえ、$0 \to H^\bullet(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega \otimes \bar{\Omega}) / \operatorname{Image}(L + \bar{L}) \to M \to \operatorname{Ker}(L + \bar{L}) \to 0$: exact.

$\Bbbk[L]$ は (n+1) 次元。

$0 \to \operatorname{Ker}(L + \bar{L}) \to \Bbbk[L, \bar{L}] \to (L + \bar{L})\Bbbk[L, \bar{L}] \to 0$:exact

と

$0 \to (L + \bar{L})\Bbbk[L, \bar{L}] \to \Bbbk[L, \bar{L}] \overset{\text{引き算}}{\to} \Bbbk[L] \to 0$: exact により、

$$\dim \operatorname{Ker}(L + \bar{L}) = (n + 1)^2 - (n + 1) = n^2 + n.$$

$0 \to (L + \bar{L})\Bbbk[L, \bar{L}] \to \Bbbk[L, \bar{L}] \overset{\text{引き算}}{\to} \Bbbk[L] \to 0$: exact により、

$\dim(M) = 2n + 2$ であることがわかり、

我々の spectral sequence は退化している.

30. 射影空間から一般の射影多様体へ

定義 30.0.1. $\mathbb{P}^n$ 上の ∂-module $\mathcal{F}$ と $\bar{\mathbb{P}}^n$ 上の $\bar{\partial}$-module $\bar{\mathcal{G}}$ をとる。

(1) $\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \mathcal{WC} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \bar{\mathcal{G}}$
(2) $\mathcal{A}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \bar{\mathcal{G}}$
(3) $\mathfrak{WC}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \mathfrak{WC} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \bar{\mathcal{G}}$
(4) $\mathfrak{A}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \bar{\mathcal{G}}$

と定義する。これらは quasi coherent $\mathcal{O}^{(p)}$-module である。

定義よりすぐに これらの sheaf が $\mathfrak{d}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$ の (可換な) 作用を認容すること、したがって「 $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{G}}$ なし」の場合と同様のコホモロジーの議論ができることがわかる。

30.340. **主定理の陳述 ($\mathcal{F}, \bar{\mathcal{G}}$ バージョン).** 編集中につき、間違い多し。

定理 30.340.1. 前小節の仮定のもとで、以下 $\Bbbk$ の標数 は $p > 0$ であるとする。

(1) $\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}, \mathcal{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}, \mathfrak{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}, \mathfrak{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}$ は odd 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ をもつ double complex である。

(2) ステレオ加群としては、$\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}} \cong \bigoplus_{l\geq 0}(\mathcal{F}\otimes\widetilde{\Omega^\bullet[k]})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]}(\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]}\otimes \bar{\mathcal{G}})\otimes(\mathcal{O}(-l,-l))$

(3) $\bar{\mathfrak{d}}$-hyper cohomology 群の層は以下のように与えられる。

(i) $\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}$ について。

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}), \mathfrak{d}) &\cong (\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet, \partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}}[C^p_{U\bar{V}}], 0) \\
&\overset{\mathfrak{d}-\mathrm{q.i}}{\sim} (\bigoplus_{l\geq 0}(\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}}[C^p_{U\bar{V}}], 0)
\end{aligned}
$$

とくに、

$$
\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}})) \cong \mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}}(\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}}[C^p_{U\bar{V}}]
$$

$$
\mathbb{R}^\bullet\Gamma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n; \mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}), \mathfrak{d}) \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} H^\bullet(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n, \mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}}\otimes_{\mathcal{O}^{(p)}}\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\mathcal{G}}(-lp,-lp))
$$

(ii) $\mathcal{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}$ について。

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}), \mathfrak{d}) \cong& (\Omega^\bullet, \partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}, 0) \\
&\oplus(\tilde{\Omega}_{(k=0)}, \partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}, 0) \\
\overset{\mathfrak{d}-\mathrm{q.i}}{\sim}& (\Omega^\bullet_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}},\mathrm{sparse}}, 0)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}, 0) \\
&\oplus(\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)}, 0)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}, 0)
\end{aligned}
$$

とくに、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}})) \cong& (\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}}) \\
&\oplus(\mathcal{F}\otimes\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}\Gamma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n; \mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}})) \cong& H^\bullet((\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}})) \\
&\oplus\bigoplus_{l=1}^{\infty} H^\bullet(\mathcal{F}\otimes\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes(\bar{\mathcal{G}}))(-lp,-lp))
\end{aligned}
$$

(iii) $\mathfrak{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}, \mathfrak{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}$ について。

$$
\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}})) \cong \mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}})) \cong (\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\otimes\bar{\mathcal{G}})
$$

$$
\begin{aligned}
&R^\bullet\Gamma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n; \mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}), \mathfrak{d}) \\
&\cong R^\bullet\Gamma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n; \mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}), \mathfrak{d}) \\
&\cong H^\bullet(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n; (\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\mathcal{G}}))
\end{aligned}
$$

(4) $\mathbf{d} = \mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}$ に関して、

$$
(\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}}, \mathbf{d}) \overset{q.i}{\sim} \bigoplus_{l\geq 0}(((\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes(\bar{\Omega}^\bullet_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\mathcal{G}})[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})(-lp,-lp)), 0)
$$

ゆえに、

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}},\mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l\ge 0}(\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes(\bar{\Omega}^\bullet_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\mathcal{G}})[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})(-lp,-lp))$$

$$R^i\Gamma(\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}};\mathcal{WC}_{\mathcal{F},\bar{\mathcal{G}}},\mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l\ge 0} R^i\Gamma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n;(\mathcal{F}\otimes\Omega^\bullet_{\mathrm{sparse}})\boxtimes(\bar{\Omega}^\bullet_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\mathcal{G}})[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})](-lp,-lp))$$

さらに「われわれの spectral sequence」は E_2 で退化する。

50. 公式

50.500. 公式.

$$[\bar{X}_i,X_j]=hC\delta_{ij}\quad\text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i,\bar{X}_i]=0,\qquad [X_i,X_j]=0.\qquad (i,j=0,1,2,\dots,n).$$

C は中心的元である。

$$[\bar{E}_i,E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i,\bar{E}_j]_+=0,\qquad [E_i,E_j]_+=0$$

$$(X_i\bar{X}_i)^p-(hC)^{p-1}X_i\bar{X}_i = X_i^p\bar{X}_i^p\qquad (i=0,1,2,\dots,n).$$

$$(E_i\bar{E}_i)^2=-(khC)E_i\bar{E}_i=0.\qquad (i=0,1,2,\dots,n).$$

$$(E_i\bar{E}_i)^p-(khC)^{p-1}E_i\bar{E}_i=0.\qquad (i=0,1,2,\dots,n).$$

$$(k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i)^p-(khC)^{p-1}(k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i)=k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p$$

$\mu_{(k,0)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i)$ とおくと、

$$\mu_{(k,0)}^p-(khC)^{p-1}\mu_{(k,0)}=\sum_i k^pX_i^p\bar{X}_i^p.$$

50.501. 特別な元. 次の元は本文中に何度も現れる。

$\varepsilon=\mathfrak{d}\sum_i X_i\bar{X}_i=\sum_i\bar{X}_iE_i$
$\bar{\varepsilon}=\bar{\mathfrak{d}}\sum_i X_i\bar{X}_i=\sum_i X_i\bar{E}_i$
$\mathfrak{d}=\frac{1}{hC}\operatorname{ad}\varepsilon$
$\bar{\mathfrak{d}}=-\frac{1}{hC}\operatorname{ad}\bar{\varepsilon}$

$\mathfrak{d},\bar{\mathfrak{d}}$ は odd な微分作用素であり、生成元への作用は次のように与えられる。

$\bullet$	k	X_i	$\mathfrak{d}X_i$	$\bar{X}_i$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$
$\mathfrak{d}\bullet$	0	$\mathfrak{d}X_i$	0	0	$k\bar{X}_i$
$\bar{\mathfrak{d}}\bullet$	0	0	$-kX_i$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$	0

μ_0,μ_1 を次のように定義する。

$$\mu_0=\mu_{(k,0)}=k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i$$

$$\mu_1=k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i-C$$

$\mu_0^p-(khC)^{p-1}\mu_0=k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p.$

$\prod_{j=0}^{p-1}(\mu_0 - jkhC) = k^p \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p$
$\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}} \sum_i X_i \bar{X}_i = k \sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i E_i \bar{E}_i = \mu_0$

$[\mu_0, \bar{X}_0] = [X_0 \bar{X}_0, \bar{X}_0] = [X_0, \bar{X}_0]\bar{X}_0 = -Ch$ ゆえ、

$$\mu_0 \bar{X}_0 = \bar{X}_0(\mu_0 - Ch)$$

一般の一変数関数 f に対して

$$f(\mu_0)\bar{X}_0 = \bar{X}_0(\mu_0 - Ch)$$

故に一般の整数 s に対して、

$$f(\mu_0)\bar{X}_0^s = \bar{X}_0^s(\mu_0 - sCh)$$

$$x_i \stackrel{\text{def}}{=} X_i X_0^{-1} = X_0^{-1} X_i, \quad x_i' \stackrel{\text{def}}{=} X_0 \bar{X}_i, \quad e_i \stackrel{\text{def}}{=} E_i X_0^{-1} = X_0^{-1} E_i, \quad e_i' \stackrel{\text{def}}{=} X_0 \bar{E}_i = \bar{E}_i X_0.$$

$$\bar{x}_i = \bar{X}_i \bar{X}_0^{-1} = \bar{X}_0^{-1} \bar{X}_i = (x_0')^{-1} x_i', \quad \bar{e}_i = \bar{E}_i \bar{X}_0^{-1} = \bar{X}_0^{-1} \bar{E}_i = (x_0')^{-1} e_i'.$$

参考文献

[1] L. Illusie. Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., pages 501–661, 1979.