NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.010
要約

0.10. **プラン.**

(1) $\mathbb{Z}$ 上、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の射影座標環からはじめて Marsden-Weinstein 商をとることにより 非可換の次数付き環 A を得る。
(2) 標数 0 の体上で考えるならば、A の Proj は空である。
(3) 標数 $p > 0$ ならば、 Proj は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ であり、A は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras とみなせる。
(4) コホモロジーは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の可換理論における普通のコホモロジーとして計算できる。
(5) 制約 ($\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の subvariety) を考えると話が変わる。
    (a) $(I^p, \bar{I}^p)$ を定義イデアルとして non-commutative なものを割る。
    (b) これについてはあとで深く考える必要がある。
    (c) $X \times Y \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ みたいのも考えられるかも。
    (d) どう進むのか。
    (e) そもそも意味があるのか。

合理性の検討

(1) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ を $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}$ の非可換化の Marsden Weinstein quotient として作る。–$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ による商による実現として自然。
(2) $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1}$ の非可換化としては, 正準交換関係を用いる。–歴史的、常識的に見て自然。
(3) 微分作用素として実現し、影をとる。–微分作用素の環をモデルにとる限り projective/proper なものはできない。
(4) とくに $\mathcal{O}(1)$ 上の微分作用素を考える。– 正当性:Fubini-Study metric を生み出す。
(5) super 変数を考える–(非可換) 微分作用素の構成、Fermion の存在。

問題と期待される解答

(1) ここで作った 非可換 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ は妥当なものであることを示せ。–影は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. (check 済).
(2) 非可換 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ のコホモロジーは? –基本的に可換なものと同じであってほしい。
(3) 非可換代数多様体を一般的に定義せよ。– $(I^p, \bar{I}^p)$ で定義したものであってほしい。ただしその妥当性はさらに論を待たねばならない。
(4) 非可換な方向への変形理論とモジュライ理論の確立。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.011

0.11. **2017/12/23 時点のみちすじガイド.**

(1) 根本問題: (非斉次) Weyl 環 weyl の幾何学的意味 (1.12)
  (a) 正標数に還元すると $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の開集合

$$U_\diamondsuit \overset{\text{def}}{=} \{([a_0 : a_1 : \cdots : a_n], [\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \cdots : \bar{a}_n]); \sum_i a_i \bar{a}_i \neq 0\}$$

  上の sheaf of algebras と対応する。(1.12.1)
  (b) $U_\diamondsuit$ を完備化するには $\rightarrow$
    (i) 一つ変数を付け加えて、 斉次化する。
    (ii) 付け加えた点たちは、$\sum_i a_i \bar{a}_i = 0$ を満たす点に対応し、a_i が複素数で、 $\bar{a}_i$ が本当に a_i の複素共役の場合には「空集合」である。
  (c) 微分形式は、Clifford 代数の元として作る。

(2) 斉次 Weyl-Clifford 代数 WC の定義 (2.20)
  (a) 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$. (非斉次の場合には 1.14 参照のこと。斉次の場合は 2.20.4 を参照のこと。)

(3) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層としての $\mathcal{WC}$ (2.21).
  (a) ステレオ加群としての見方 (2.25)
  (b) $\mathbb{P}^n$ 上の層 $(\pi_* \Omega)^{\mathbb{G}_m} \cong \Omega[\partial \log(X_0)]$ (2.22).
  (c) $\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^\infty \left(\Omega[\partial \log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)]\right)(-l, -l)$ (2.25)

(4) Moment map (Moment element) で割る。(1.13,1.15)
  (a) 大きく分けて 2 種類の Moment element を考えられる。(1.15) 無限小の場合と、有限の場合である。
  (b) (幾何の方でいうと) $\mathbb{A}_o^{n+1} \times \mathbb{A}_o^{n+1}$ から、$\mathbb{G}_m$ 作用で 2 度 ((1,-1) 作用と (1,1) 作用で) 割って、最後に μ_1 で切る。(1.13) $\mathcal{A} \cong \mathcal{WC}/(\mu_1)$. (4.40(書きかけ))

(5) cohomology (無限小の場合)

$$\mathcal{A} \cong \left(\Omega[\partial \log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)]\right)$$

但し $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は通常のものとは少し異なる。
  complex として、$\mathcal{A}, \bar{\mathfrak{d}}$ は

$$(\Omega[\partial \log(X_0)], \bar{\mathfrak{d}}) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)], 0)$$

と homological isom. さらに、それは

$$(\Omega \overset{k\times}{\to} \Omega) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)], 0)$$

と quasi isomorphic. (下の事参照)

(6) (ここの段階は考慮を要するが、とりあえずここでは) $\mathfrak{d}$ を $\bar{\mathfrak{d}}$-complex の endomorphism として捉えることにする。すると、$((\mathcal{A}, \bar{\mathfrak{d}}), \mathfrak{d})$ は

$$(\mathbb{k}_1[k] \overset{k\times}{\to} \mathbb{k}_1[k]) \otimes_{\mathbb{k}_1[k]} \Omega \boxtimes (\Omega[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)], \mathfrak{d})$$

と quasi isomorphic であり、それは

$$(\mathbb{k}_1[k] \overset{k\times}{\to} \mathbb{k}_1[k]) \otimes_{\mathbb{k}_1[k]} (\Omega, 0) \boxtimes (\Omega, 0)$$

と quasi isomorphic である。ここのところ、derived category レベルの話を二回行うことに相当することをやっているので、正確な議論を行うにはもう少し考察が必要である。ともあれ、コホモロジーレベルでは非可換理論がとくに可換理論と違うところは見られず、あえて言えば問題設定 ($\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の定義の半必然性など) に非可換性が関与しているぐらいである。

(7) 有限の場合が、今年のはじめごろに土基を悩ませたのであるが、C 消去の方針ではなく、単に (有限の場合の) $\mu_1 = 0$ を課せば $\mu_1 \equiv kC$ modulo exacts となって、うまく行きそうである。これも少し論を待たねばならない。

(derived category による 前変数の $\bar{\mathfrak{d}}$ の関与する複体の扱い)

(追記)–ここのところは derived category の中で扱うよりもむしろただの複体と見て取り扱うほうが易しいようだ。axiom TR3 で存在が保証される map は一意ではなく、一般に取扱がむづかしいことがしられている。ここでは単に map を具体的に作ったほうが良いというわけ。)

(1) $0 \to \Omega \xrightarrow{u} \Omega[\partial \log X_0] \xrightarrow{v} \Omega \to 0$: exact.
(2) $\Omega \xrightarrow{u} \Omega[\partial \log X_0] \xrightarrow{q} C_u \underset{[1]}{\xrightarrow{p_1}} \Omega$:distinguished triangle (by the definition of a distingushed triangle in the Derived category.)
(3) $C_u \cong \Omega$ (homological isomoprhism) (by the construction of the cone.)
(4) $C_u \xrightarrow{p_1} \Omega \to C_{p_1} \underset{[1]}{\to} C_u$ (by the definition of a distingushed triangle in the Derived category.)
(5) $C_{p_1} \cong \Omega[\partial \log X_0]$ (The axiom TR3 of triangulated categories.)

以上、特に後半について、もう少し突っ込んだ議論が待たれるところだが、ここが今の研究の状況である。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.012
要約

0.12. **根本問題.** $\Bbbk_1$ を可換環, $h \in \Bbbk_1$ とする。

非斉次 Weyl 環 $\mathrm{weyl}_{n+1} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle/(\mathrm{ccr})$ (ただし、ccr は交換関係 $[\bar{x}_i, x_j] = h\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad [\bar{x}_i, \bar{x}_j] = 0$) から始める。

weyl_{n+1} の signed degree が 0 のところをとってくる

$$\mathrm{weyl}_{(0)} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle_{(0)} = \Bbbk\langle\{x_i\bar{x}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}\rangle.$$

ただし、signed degree sdeg は 以下で決まる。

変数:	x	$\bar{x}$
sdeg:	1	-1

つぎに、「moment map が 0 のところ」すなわち $\sum_i x_i\bar{x}_i = R$ のところに切る。

$$A = \mathrm{weyl}_{(0)} / (\sum_i x_i\bar{x}_i - R)$$

$\Bbbk_1$ の標数 が $p > 0$ のとき、A の中心は

$$\Bbbk[\{x_i^p\bar{x}_j^p; i, j = 0, \dots, n\}]/(\mathrm{relation})$$

と等しく、その関係式 (relation) は

$$\sum_i x_i^p\bar{x}_i^p = R^p(1 - h^{p-1})$$

で与えられる。

事実 0.12.1. $A = \mathrm{weyl}_{(0)} / (\sum_i x_i\bar{x}_i - R)$ は、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の affine 開集合

$$\{[a_0 : a_1 : \dots a_n], [\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \dots \bar{a}_n]; \sum_i a_i\bar{a}_i \neq 0\}$$

上の coherent sheaf of algebras $\mathcal{A}$ と対応し、$\mathcal{A}$ の各閉点でのファイバーは は全行列環 M_{p^n} と同型である。

根本問題

事実 0.12.1 を参考にして $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\, \mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の非可換化を構成せよ。とくに、

- 非斉次ワイル環の Spec の「完備化」に留意すること。
- 超変数を用いた「微分形式の非可換版」をきちんと作ること。

Silly computation

「完備化」でこれからやろうとしていることを可換の場合に見てみよう。要するに変数を一つ付け加えて斉次化し、proj を考えるに過ぎない。

多項式環 $B = \Bbbk[X_0, \dots X_n, \bar{X}_0, \dots \bar{X}_n]$

からはじめて、その signed degree が 0 のところをとってくる

$$B_{(0)} = \Bbbk\langle X_0, \dots X_n, \bar{X}_0, \dots \bar{X}_n\rangle_{(0)} = \Bbbk[\{X_i \bar{X}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}].$$

これは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の Segré embedding の像の射影座標環 (あ) である。もう少し詳しく言えば、$(n+1)^2$ 個のあたらしい変数 $\{X_{i,\bar{j}}; 0 \leq i, j \leq n\}$ を用意して、

$$B_{(0)} = \Bbbk[\{X_i \bar{X}_j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\rangle \ni X_i \bar{X}_j \mapsto X_{i\bar{j}} \in \Bbbk[\{X_{i\bar{j}}\}]$$

を考えると、これに対応する Proj が Segré embedding を与えるのであった。

つぎに、「moment map が 0 のところ」すなわち $\sum_i X_i \bar{X}_i = 1$ のところに切るわけだが、$\sum_i X_i \bar{X}_i$ (Segré embedding で $\sum_i X_{i,\bar{i}}$ に対応する) 自体も (あ) の線形な座標の一つであるから、$\sum_i X_i \bar{X}_i = 1$ は一つの affine piece を取り出していることと同じである。そこで、新しい余分な変数 C をとって、改めて $\mathrm{Proj}(A_{(0)}[C]/(\sum_i X_i \bar{X}_i = C)$ を考えれば、これはもちろん $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ に戻るというわけである。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.013 要約

0.13. **Marsden-Weinstein quotient.** "Marsden-Weinstein quotient" という言葉自体はシンプレクティック幾何学から借りている。その概要については wikipedia の記事

(`https://en.wikipedia.org/wiki/Moment_map`)
を 見ると良い。nlab の記事

`https://ncatlab.org/nlab/show/BV-BRST+formalism`

の Poisson reduction のところも良い。

環 W に対して、その部分集合 S で W (というか Spec(W)) を「制限」したい。W が可換の場合であれば、これは S で生成される W のイデアル $W \cdot S$ でもって剰余環 $W/W \cdot S$ を考えることに該当する。

W が非可換な場合にも、S で生成されるイデアルを考えることはもちろん可能ではあるが、我々のワイル環のように W が単純環の場合などもあり、必ずしも有効であるとは限らない。不確定性原理により二つの変数を同時に正確に定めることは一般には不可能なのだ。

そこで、S で生成される左イデアル $J = W \cdot S$ を 考えて、W における J の idealizer $\mathbb{I}_W(J) = \{a \in W; Ja \subset J\}$ を考える。$\mathbb{I}_W(J)$ は W の元のうち $S = 0$ という制限と「協調的」な元であると考えて良いだろう。そこで $\mathbb{I}_W(J)/J$ を W の S による制限として据えるのである。

環 W に 代数群 G が作用していたとする。実は W の G での商 (Marsden-Weinstein 商と呼ばれる) は上のような「制限」の考え方で得られる、別の言い方をすると Marsden-Weinstein 商 は W は moment map μ による W の「制限」と見ることができることを以下に示そう。

Spec(W) の G での商空間は W の G-不変環に対応する:

$$\mathrm{Spec}(W)/G \text{ ``$=$'' } \mathrm{Spec}(W^G)$$

... と行きたいところである。が、いくつかの座標の固定を放棄した (G-軌道のどこにあるかを決めるのをやめる) かわりに、決定できる元 ("運動量") がある。別の言い方をすれば、$\mu \in W^G$ があって、真にほしいものは

$$\mathrm{Spec}(W)//G = \mu^{-1}(0) \subset \mathrm{Spec}(W^G)$$

である。(ここでは μ は一個のように書いているが複数でもよい。つまり、$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) \in W^k$) いくつかの良い条件のもとで、

$$W^G = \mathbb{I}_W(J), \quad J = W \cdot (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$$

である。

まとめ

- 群の非可換環への作用 から moment map が定まる。
- moment map での「制限」により非可換環の spec の商空間が与えられる。

シンプレクティックの場合に関する補足。

複素ケーラー多様体 X と 実 Lie 群 G の X へのケーラー形式を保つ作用について、

$$X/G_{\mathbb{C}} \cong X//G \qquad (G_{\mathbb{C}} : G \text{ の複素化}).$$

とくに、

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}}/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{A}^{n+1}//S^1 = \mu^{-1}(0)/S^1$$

我々はこの話を「非可換版」にし、なおかつ「超変数を付け加える」つもりである。moment map をどう選ぶかというのは S^1 の作用 (もともとの環 W の $\mathbb{Z}$-grading) をどうとるかに相当し、それは超変数の話を抜きにすれば上記 $\mathbb{P}^n$ の話と一致すべきであろうから、

(1) $\sum_i X_i \bar{X}_i$. 対応する次数付けは、

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	0	0

(2) $k\sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i E_i \bar{E}_i$. 対応する次数付けは、

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	1	-1

のいずれかといったところだろう。以下の No.015 で検討する。

0.14. **選択 1: 微分.** 微分形式の理論を考えるにあたって、微分形式の微分をどう扱うかは基本的である。ここでは $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の 2 つの微分を導入したい。まず $\mathbb{A}^{n+1}$ の「座標環」に「form を付け加えた」環 S (仮名) を作りたい。

$\Bbbk_1$ を可換環, $h \in \Bbbk_1$ とする。
(仮説 0.) S は $\Bbbk_1$ 上の super 代数である。余談であるが S の元については super 代数の標準的な記法をもちいる。例えば $[\bullet, \bullet]$ は交換子ではなく super 交換子であり、$\hat{\bullet}$ のように hat は $\bullet$ の parity を表す。
(仮説 1.) 変数 $x_0, \dots, x_n, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n$ は (非斉次) 正準交換関係 **(ccr)** を満たす。つまり、非斉次 Weyl 環 $\mathrm{weyl}_{n+1} = \Bbbk\langle x_0, \dots x_n, \bar{x}_0, \dots \bar{x}_n\rangle/(\mathrm{ccr})$ から始める。我々の扱いたい環 S は weyl_{n+1} の拡大環である。
(仮説 2.) S は **2 つの odd 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の作用を受ける**。すなわち、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ はともに S から S への $\Bbbk_1$-線形写像であり、(super) Leibnitz 則

$$\mathfrak{d}(ab) = \mathfrak{d}(a)b + (-1)^{\hat{b}} a \mathfrak{d} b$$
$$\bar{\mathfrak{d}}(ab) = \bar{\mathfrak{d}}(a)b + (-1)^{\hat{b}} a \bar{\mathfrak{d}} b$$

を満たす。($\hat{b}$ は b の parity.)
(仮説 3.) $\mathfrak{d}x_0, \dots \mathfrak{d}x_n$ のことを $e_0, \dots, e_n$, $\bar{\mathfrak{d}}x_0, \dots \bar{\mathfrak{d}}x_n$ のことを $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n$ と書く。 $e_0, \dots, e_n, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_n$ は **(acr)** を満たす。

$$[e_i, \bar{e}_j]_+ = k_1 \delta_{ij}, \quad [e_i, e_j]_+ = 0, \quad [e_i, \bar{e}_j]_+ = 0,$$

(さらに、標数 2 の場合には $e_i^2 = 0, \bar{e}_i^2 = 0$ を仮定する。)
(仮説 4.) (**コーシー・リーマン**) $\bar{\mathfrak{d}}x_i = 0, \mathfrak{d}\bar{x}_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$.
(仮説 5.) e_i と x_j とはおのおの可換である。同様に $\bar{e}_i$ と $\bar{x}_j$ ともおのおの可換である。

(**'bar 無し' だけの世界、'bar 付き' だけの世界はそれぞれ可換の多項式環上の通常の微分形式の世界である。**)
(帰結 6.) x_i と $\bar{e}_i$ とは可換である。これは (ccr) を $\mathfrak{d}$ や $\bar{\mathfrak{d}}$ で作用させてみればわかる。

$$0 = \mathfrak{d}(h\delta_{ij}) = \mathfrak{d}[x_i, \bar{x}_j] = [e_i, \bar{x}_j]$$

等々。
(帰結 7.) 任意の i, j にたいして、

$$0 = \mathfrak{d}[x_i, \bar{e}_j] = [e_i, \bar{e}_j] + [x_i, \mathfrak{d}\bar{e}_j].$$

ゆえに、

$$[x_i, \mathfrak{d}\bar{e}_j] = -\delta_{ij} k_1$$

とくに、$\mathfrak{d}\bar{e}_j (= \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}x_j) \neq 0$.
(仮説 8.) ある k が存在して、$k_1 = hk$, $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}\bar{x}_i = k\bar{x}_i$ $(\forall i)$.
(帰結 8.) $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は「定数倍を除けば inner」 である。

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{h}\mathrm{ad}(\sum_i \bar{x}_i e_i), \quad \bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{h}\mathrm{ad}(\sum_i x_i \bar{e}_i)$$

(帰結 9.)

$$[\bar{\mathfrak{d}}, \mathfrak{d}] = \frac{1}{h^2}\,\mathrm{ad}([\sum_i \bar{x}_i e_i, \sum_j x_j \bar{e}_j) = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\mathfrak{d}(\sum_j x_j \bar{e}_j)) = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(k\sum_j x_j \bar{x}_j + \sum_j e_j \bar{e}_j)$$

ここでの結論

$\mathbb{A}^{n+1}$ 上の微分形式全体の空間の非可換対応物として、非斉次 Weyl 環と非斉次 Clifford 環のテンソル積

$$S = \Bbbk_1\langle x_0, \ldots, x_n, \bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n, e_0, \ldots, e_n, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n\rangle/(\mathrm{ccr},\ \mathrm{acr})$$

をとり、S の微分としては

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i \bar{x}_i e_i), \qquad \bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i x_i \bar{e}_i)$$

を採用する。

(注意)

$$\sum_i \bar{x}_i e_i = \mathfrak{d}(\sum_i x_i \bar{x}_i), \qquad \sum_i x_i \bar{e}_i = \bar{\mathfrak{d}}(\sum_i x_i \bar{x}_i),$$

(補足)

(仮説 8) はまだ唐突に過ぎたかもしれない。実際には、次のような仮説 (8a-c) を立ててそこから (仮説 8) を導くべきだろう:

(仮説 8a) $\mathfrak{d}^2 = 0$, $\bar{\mathfrak{d}}^2 = 0$.

(仮説 8b) $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は「変数ごとに」考えてよい。つまり、もともと n-変数 Weyl-Clifford 代数は 1 変数のもののテンソル積であるが、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ はそれぞれの 1 変数 Weyl Clifford 代数ごとに定義されていて、そのテンソル積として表される。

(仮説 8c) (1)-(7) と (8a,8b) から $\mathfrak{d}\bar{e} = \bar{x} + \mathrm{const.}$ のかたちが得られるが、x 変数の平行移動により原点を調整して、constant の部分は 0 と考える。[この (8c) は定数の数を増やすのを防ぐための便宜上の工夫と言ったほうが良いかもしれないが、このために constant の部分に現れうる元を限定しすぎている可能性もある。]

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.015 要約

0.15. **選択 2: moment map.** $\mathbb{A}^{n+1}$ の「form の代数」S が確定した後、今度はそれを「moment map で切らなければ」ならない。幾何学的には、 $\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ の submanifold である球面 (S^{2n+1}) を S^1 で割ることに対応する。

この回は moment map としては何をとるべきか議論する。

考え方としては、super な変数を導入する前と同じものを採用して、

(あ)
$$\mu_{(あ)} = \sum_i x_i \bar{x}_i - R$$

が妥当だと思わえるかもしれない。R は定数 ($\Bbbk_1$ の元) で、

$\mathrm{ad}(\mu_{(あ)})$ は定数倍を除いて次のような S の次数付けに対応する。

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	0	0

(あ) による Marsden-Weinstein quotient とは、この degree に関して次数が 0 の S の元の全体を、$\mu_{(あ)} = 0$ という関係式で割った剰余環である。

しかし (あ) を採用するのは我々にとってはさほど嬉しくない。我々の環 A には、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の作用が 許容されなければならない。(あ) を認めると、A では $\sum_i x_i \bar{x}_i = R$ が成り立つはずであるから、両辺を $\mathfrak{d}$ や $\bar{\mathfrak{d}}$ で微分することにより、

$$\sum_i x_i \bar{e}_i = 0, \qquad \sum_i \bar{x}_i e_i = 0$$

を得る。それらによる adjoint をとることにより、任意の $x \in A$ に対して $\mathfrak{d}x = 0, \bar{\mathfrak{d}}x = 0$ が成り立つことになり、面白い議論が期待できない。

いまのところ、(あ) の代わりに

(い)
$$\mu_{(い)} = k \sum_i x_i \bar{x}_i + \sum_i e_i \bar{e}_i = \tilde{R}$$

が適当だと思われる。$\mathrm{ad}(k \sum_i x_i \bar{x}_i + \sum_i e_i \bar{e}_i - \tilde{R})$ は定数倍を除いて次のような S の次数付けに対応する。

x_i	$\bar{x}_i$	e_i	$\bar{e}_i$
1	-1	1	-1

$\mu_{(い)}$ は $\mathfrak{d}$-closed かつ $\bar{\mathfrak{d}}$-closed であるから $\mu_{(い)}$ に関する剰余環には (あ) に見られたような不具合はない。さらに、$[\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}] = \frac{1}{h}\mathrm{ad}(\mu_{(い)})$ であるから、S の $\mu_{(い)}$ による Marsden-Weinstein quotient では $\mathfrak{d}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$ は可換である。大変都合がいい。

今回の結論

moment map としては

$$k\sum_i x_i\bar{x}_i + \sum_i e_i\bar{e}_i - R$$

を採用する。

コホモロジーの議論は $\{k = 0\}$ の近く以外では面白くなさそうなので、$\Bbbk_1[[k]]$ のような環を係数環に据え、k に関する order を考えて $R = k^\rho$ のような形に限定して議論をすることを目論んでいる。

0.17. **開集合 $U, \bar{V}$.** $\mathbb{P}^n$ のアフィン開集合として、$U_i = \{X_i \neq 0\}$ を一つ選ぶ。選んだ index i のことを i_U と書く。

$$U = \{X_{i_U} \neq 0\}.$$

同様に、$\bar{\mathbb{P}}^n$ ($\mathbb{P}^n$ のコピー) のアフィン開集合 $\bar{V}$ も同じように定義する。

$$\bar{V} = \{\bar{X}_{i_{\bar{V}}} \neq 0\}.$$

$X_{i_U}, \bar{X}_{i_{\bar{V}}}$ のことを単に $X_U, \bar{X}_{\bar{V}}$ と書く。つぎの 2 つの層が大活躍する:

$$\Omega^{\bullet\bullet}[\partial \log(\bar{X}_{\bar{V}})]$$
$$\Omega^{\bullet\bullet}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})]$$

番号を入れ換え、$i_U = 0$ としても問題ない。$i_{\bar{V}} = 0$ と置くのは論理的には多少問題があるが、定義体 $\Bbbk$ を拡大しておいて元の数を増やしておき、generic な線形変数変換を行えばこの稿にある程度のことは問題なく処理できる。そこで以下は断りなしに $i_U = 0, i_{\bar{V}} = 0$ としているところがある。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.18 要約

0.18. Ω_{sparse}, $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{sparse}}$. $\mathbb{P}^n$ の斉次座標 $X_0, X_1, \ldots, X_n$ を (この稿ではいつものように) とる。

アフィン開集合 $U_j = \{X_j \neq 0\}$ に対して、$x_i^{(j)} = X_i/X_j$ を 局所座標にとる。

$\mathcal{O}^p = \{f^p; f \in \mathcal{O}\}$ と

$$\{(x_i^{(j)})^{p-1} x_i^{(j)}; i = 0, \ldots n\}$$

で生成される Ω の subsheaf を Ω_{sparse} と書く。これは j のとり方によらない。(うまく貼り合っている。)

$\widetilde{\Omega} = \Omega[d\log(X_j]$ の subsheaf として、$\widetilde{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[d\log X_j]$ とおく。これも j によらず、うまく貼り合っている。

$$d\log X_j - d\log X_l = d\log(X_j/X_k) \in \Omega_{\mathrm{sparse}}$$

に注意のこと。

つぎの inverse Cartier operator は Deligne-Illusie-Cartier 理論の大事な点の一つであり、本稿でも大変活躍する。

命題 0.18.1. [?, Th 2.1.9] 標数 p の体上のスキーム S 上スムースなスキーム X に対して、$X^{(p)} = X \times_{S,\mathrm{str},\mathrm{Frob}} S$ とおく。このとき、inverse Cartier operator

$$C_{X/S}^{-1} : \Omega_{X^{(p)}/S} \cong \mathcal{H}(\Omega_{X/S}).$$

は同型である。ただし、C^{-1} は $f \in X^p$ に対して $f \mapsto f^p$, $df \mapsto f^{p-1}df$ と対応させることにより与えられる。

この定理の右辺は cohomology 類であるが、我々は射影座標によりその lift

$$\hat{C}_{X/S}^{-1} : \Omega_{X^{(p)}/S} \to \Omega_{X/S}$$

が定義され、その像が global な対象 Ω_{sparse} である。その結果、次の命題を得る:

命題 0.18.2.

$$\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \cong \mathcal{H}(\Omega_{\mathbb{P}^n})$$
$$\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \cong \mathcal{H}(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n})$$

言い方を変えれば、$(\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}, 0)$ と $(\Omega_{\mathbb{P}^n}, d)$ とは quasi isom. であり、$(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}, 0)$ と $(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n}, d)$ とも quasi isom. である。

なお、この命題自身は local に (多項式環の話に帰着して) 容易に証明できる。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.20 要約

0.20. 斉次 Weyl-Clifford 代数.

0.20.1. 基礎体 $\Bbbk$, 基礎環 $\Bbbk_1, \Bbbk_2, \Bbbk_3$. 基礎体 $\Bbbk$ とその拡大可換環 $\Bbbk_2$ を固定する。特別の元 $h, k \in \Bbbk_2$. を選んでおき、$\Bbbk_1 = \Bbbk[h], \Bbbk_2 = \Bbbk[h,k]$ とおく。h を 0 に特殊化することにより、「可換の場合」にすぐ帰着できるようにしているのである。後のセクションでは、$\Bbbk$ は標数 $p \neq 0$ の体で、$\Bbbk_1$ は 環 $\Bbbk[h, \frac{1}{1-h^{p-1}}]$ を採用することが多いだろう。

さらに、悪ノリの部類に属するかもしれないが、あとあと C が登場の後は $\Bbbk_3 = \Bbbk_2[C]$ と定義する。

0.20.2. 斉次 *Weyl-Clifford* 代数の定義.

定義 0.20.1. 斉次 Weyl 代数を次のように定める。

$$\mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} = \Bbbk_1\langle C, X_0, X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n\rangle$$

ただし $X_i, \bar{X}_j$ はつぎの正準交換関係 (canonical commutation relations,CCR) を満たす:

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij} \quad \text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i, \bar{X}_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0. \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

C は中心的元である。

上のように、「$\Bbbk$ 上環として $X_1, X_2, \ldots$ で生成される環」という記号を本稿では $\Bbbk\langle X_1, X_2, \ldots\rangle$ とかく。

定義 0.20.2. 斉次 Clifford 代数とは次の代数である。

$$\mathrm{Cliff}_{n+1}^{(h,C,k)} = \Bbbk_1\langle C, E_0, \ldots, E_n, \bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_n\rangle$$

ただし $E, \bar{E}$ たちはつぎの正準反交換関係 (CAR) を満たす:

$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \qquad [E_i, E_j]_+ = 0$$

ここで, C はやはり中心的な元である。.

定義 0.20.3. 非負整数 n, m にたいし、斉次 Weyl-Clifford 代数を次のテンソル積で定義する。

$$\mathrm{WC}_{n+1,m+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{Weyl}_{n+1}^{(h,C)} \otimes_{\Bbbk_3} \mathrm{Cliff}_{m+1}^{(h,C,k)}.$$

(ただし、少し上に予告したように、$\Bbbk_3 = \Bbbk_2[C]$ と定義する。) $n = m$ の ときは簡単のため $\mathrm{WC}_{n+1}^{(h,C,k)} = \mathrm{WC}_{n+1,n+1}^{(h,C,k)}$ と書くことにする。

よく知られている事実 (を斉次化したもの) により、

命題 0.20.4. Weyl_{n+1} は

$$\{X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n} |\ i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

を自由基底に持つ $\Bbbk_3 = \Bbbk_2[C]$ 上の自由加群であり、Cliff_{m+1} は

$$\{E_0^{j_0} E_1^{j_1} E_2^{j_2} \ldots E_n^{j_n} |\ j_1, \ldots, j_n \in \{0, 1\}\}$$

を自由基底に持つ $\Bbbk_3$ 上の自由加群である。当然ながら $\mathrm{WC}_{n,m}$ も $\Bbbk_3$ 上の自由加群であることがわかる。

0.20.3. WC の超代数としての構造. 微分形式の代数と同様に、$X, \bar{X}, C$ は even, $E, \bar{E}$ は odd と考えて WC_{n+1} は超代数の構造をもつ。ただし、$X, \bar{X}, C$ は even, $E, \bar{E}$ は odd と考える。以下、WC に関する記号は超代数としての記号として用いる。たとえば、bracket は super commutator であり、 ad は super adjoint である:

$$\mathrm{ad}(x)(y = [x, y] = xy - (-1)^{\hat{x}\hat{y}} yx$$

($\hat{?}$ は ? の符号)

0.20.4. 元 ε $\bar{\varepsilon}$ と微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$. WC_{n+1} の元 ε, $\bar{\varepsilon}$ を以下で定義する。

$$\varepsilon = \sum_i \bar{X}_i E_i, \quad \bar{\varepsilon} = \sum_i X_i \bar{E}_i$$

微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ を以下のように定義する。

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{hC} \mathrm{ad}\, \varepsilon, \quad \bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{hC} \mathrm{ad}\, \bar{\varepsilon}$$

(一つ前の小節に書いたように ad は super adjoint である。) これらは見かけ上 $\mathrm{WC} \otimes_{\Bbbk_3} \Bbbk_3[\frac{1}{hC}]$ 上の作用素だが、簡単な計算によりこれらの作用素の生成元 $X_?, \bar{X}_?, C, E_?, \bar{E}_?$ での値は WC に入り、super Leibnitz rule を満たすことがわかる。よって、それらは 0.20.4 の自由性により WC 上の作用素を定義することが言える。

$$\varepsilon = \mathfrak{d}(\sum_i X_i \bar{X}_i), \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\mathfrak{d}}(\sum_i X_i \bar{X}_i)$$

にも注意しよう。

$x \in \mathrm{WC}$ に対して、

$$[\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}](x) = (\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}} + \bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d})(x) = \frac{1}{hC} \mathrm{ad}\, \mu_0(x) = -k\, \mathrm{sdeg}(x) \cdot x$$

である。ただし、 $\mu_0 \in \mathrm{WC}$ は

$$\mu_0 = k \sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i E_i \bar{E}_i.$$

sdeg は signed degree (“bar の数”) である。

変数:	X	$\bar{X}$	E	$\bar{E}$	C
sdeg:	1	-1	1	-1	0

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.21 要約

0.21. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ での層 $\mathcal{WC}$ の定義. この小節でも、$\Bbbk_2 = \Bbbk[h, k]$ という略号を使う。$\Bbbk$ は体、h, k は $\Bbbk$ 上代数的独立とは限らない元である。

0.21.1. ステレオ作用、ステレオ加群. 。

斉次 Weyl-Clifford 環 WC_{n+1} に、左から左変数 (無印の X たち) の多項式環 $\Bbbk_2[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ の元、右から 右変数 (bar 付きの変数たちの多項式) 環 $\Bbbk_2[\bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n]$ の元を作用させることを考える。この作用をここでは「ステレオ作用」と呼ぶことにする。WC_{n+1} はステレオ作用により $(2n+1)$ 変数多項式環 $\Bbbk_2[X_0, X_1, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots \bar{X}_n]$ 上の (通常の可換環論的な意味での) 二重次数付き加群と見ることができる。したがってそれは $\mathbb{A}^{n+1} \times \bar{\mathbb{A}}^{n+1}$ 上の加群の層、敷いては (ここから $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$-作用で割って) $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層を与える。これを $\mathcal{WC}$ と書く。

WC の構造の導入のしかたにより、$\mathcal{WC}$ は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層としては環の構造を持つとは言えないが、$\mathrm{char}(\Bbbk) > 0$ のときには可換理論の枠内で $\mathcal{WC}$ の乗法構造を理解することができる。包含写像 $\Bbbk_2[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p] \subset \Bbbk_2[X_0, \ldots, X_n, \bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n]$ に対応する射影空間の射は同相であるから、それによって $\Bbbk_2[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p]$ に対応する層を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ の部分環の層とみなして、$\mathcal{O}^{(p)}$ と書くことにする。言い換えると $\mathcal{O}^{(p)}$ は relative Frobenius morphism による構造層の direct image である。

$\Bbbk_2[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p]$ は WC の中心に含まれるから、$\mathcal{O}^{(p)}$-上であれば、$\mathcal{WC}$ は環 (正確には、多元環) の構造を持つ。

0.21.2. *sub, quotient* の順番の整理と変更. ここで一旦立ち止まって、この後の方針について少し説明しよう。

斉次 Weyl 環 Weyl から $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の最終的な対象を得るために以下に模式的に書くような 3 段階を踏んだ:

$$\mathrm{WC} \overset{1}{\rightsquigarrow} (\mathrm{WC})_{(0)} \overset{2}{\rightsquigarrow} A = (\mathrm{WC})_{(0)}/(\mu) \overset{3}{\rightsquigarrow} \mathcal{A}$$

以下説明を加えるが、“関数空間” の方を見るか、対応する “spec” のような幾何学的な対象を見るかで sub と quotient の役割が反対になるので気をつけなければならない。

“関数空間” のレベルで言えば以下の通り:

step 1. $\mathbb{G}_m$ の反対角作用 による不変部分をとる

反対角作用とは $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{n+1} \ni (v, w) \mapsto (cv, c^{-1}w)$ $(c \in \mathbb{G}_m)$ に対応する作用で、

$$X_i \mapsto cX_i, \quad \bar{X}_i \mapsto c^{-1}\bar{X}_i, \quad E_i \mapsto cE_i, \quad \bar{E}_i \mapsto c^{-1}\bar{E}_i, \quad C \mapsto C$$

と書いてもよい。可換な (かつ super 変数を除いた) 場合で言えば反対角作用による不変環 ($\{X_i\bar{X}_j\}$ で生成される環) は Segré embedding を与えることに注意。

step 2. moment element μ で割る。step1+ step2 が Marsden Weinstein quotient である。

step 3. C を付け加えて斉次化した分を取り返すため、A に対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras を考える。

対応する幾何学的な対象で同じことを述べれば、次のような具合である:

step 1. $\mathbb{G}_m$ の反対角作用でわる。

step 2. moment element $\mu = 0$ で切る。

step 3. A に対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras を考え、cone から $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ に落ちる ($\mathbb{G}_m$ で割る。)

いずれにせよ、手に入るのは $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras $\mathcal{A}$ である。step 1 を step 2 の前に置いているのが Marsden-Weinstein quotient の自慢で、$(\mathrm{WC})_{(0)}$ の中では μ は比較的小さなイデアルを生成する (今考えている場合で言えば、μ は $(\mathrm{WC})_{(0)}$ の center に属する。) のである。

$\mathcal{A}$ を得るためには、上の手順を入れ換えて、次のようにすることも可能である。

WC からはじめて、

step $1' + 3'$: $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ で割る。

つまり、WC を ステレオ加群とみて、それに対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras WC を考える。

step $2'$: $\mu = 0$ で切る。

こっちのほうがよほどスッキリしている。step $1'$ を先にこなしているので、step $2'$ も安全に行える。と、いうわけで、以下ではこの方針で考えることにする。

また、moment map μ として幾とおりかが考えられるわけだが、これも step $2'$ を後回しにすることで最後に考えることができる。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.22 要約

0.22. $\mathcal{WC}$ **の構造.**

0.22.1. $\tilde{\Omega} = \pi_*(\Omega)^{\mathbb{G}_m}$. このシリーズでは 「$\tilde{\Omega}$」 とかおなじものだが、もう少し正確に、「$\pi_*(\Omega)^{\mathbb{G}_m}$」と表記されるものが度々出てくる。本質的には同じものであり、$\mathbb{P}^n$ 上の coherent sheaf で、代数層の構造を持つものである。記号も以下述べるようにほぼ妥当なものだが、いろいろなことが少しづつ省略されているので、わかりにくいものになってしまっている。ここでハッキリと書いておくことにする。

定義 0.22.1. (1) $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ のことを以下 $\mathbb{A}_o^{n+1}$ と書く。
(2) 自然な射影 $\mathbb{A}_o^{n+1} \to \mathbb{P}^n$ を π と書く。
(3) $\mathbb{A}_o^{n+1}$ のドラム複体を $\Omega_{\mathbb{A}_o^{n+1}}$ と書く。
(4) $\mathbb{P}^n$ 上の層 $\pi_*\Omega_{A_o^{n+1}}$ のことを省略して $\pi_*\Omega$ と書く。
(5) $\pi_*\Omega$ には 自然な $\mathbb{G}_m$ 作用があるから、それによる不変セクションのなす層を $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ と書く。

0.22.2. $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の座標による表現. $\mathbb{A}^{n+1}$ の座標 ($\mathbb{P}^n$ の斉次座標) $X_0, X_1, \dots, X_n$ を取り、π を

$$\pi : \mathbb{A}_o^{n+1} \ni (X_0, X_1 \dots, X_n) \mapsto [X_0, X_1 \dots, X_n]$$

と書こう。$\{X_0 \neq 0\}$ なる $\mathbb{A}^{n+1}$ の開集合に制限して考えると、 π は

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) \mapsto [1 : X_1/X_0, \dots X_n/X_0]$$

と書けるから、π は下のように分解して考えることができる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^n & \hookrightarrow & \mathbb{A}^{n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ (c, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \mapsto & (c, cx_1, cx_2, \dots, cx_n) & \mapsto & (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

0 の代わりに一般の添字 i_U を用いても同様であり、ここからすぐにわかることは:

local な $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ の表現

$\mathbb{P}^n$ 上の層 $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ は super commutative な 環の層であって、

$$(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \cong \Omega_{\mathbb{P}^n}[X_U^{-1} dX_U].$$

$\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ の満たす完全系列

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\iota} (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\mathrm{Int}_{\mathrm{Euler}}} \Omega_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

ただし、ι は form の引き戻しから自然に定まる単射、$\mathrm{Int}_{\mathrm{Euler}}$ は Euler operator との interior product である。

命題 0.22.2. 次のことはよく知られている。(係数環はどれでもいいので一番一般的な $\mathbb{Z}$ に取っている。

$$H^\bullet(\mathbb{P}^n, \Omega^\bullet) \cong \mathbb{Z}[L]/(L^{n+1})$$

Exact sequence から次を得る: degree がそれぞれ 0 と n である自由生成元 v_0, v_n があって、

$$H^\bullet(\mathbb{P}^n, \widetilde{\Omega^\bullet}) \cong \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_n.$$

0.22.3. $\mathcal{WC}$ の構造. このシリーズでは前変数、後ろ変数、2 つの $\mathbb{P}^n$ が出てくる。そこで、一方の $\mathbb{P}^n$ の射影座標を $X_0, \dots, X_n$, その外微分を ∂, もう一方の $\mathbb{P}^n$ の射影座標を $\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n$, その外微分を $\bar{\partial}$ と書くことにする。

Weil-Clifford 環の積構造の入れ方により、WC に対応する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の連接層 $\mathcal{WC}$ には $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の前変数と後ろ変数のコピーがそれぞれ subalgebra として入っている。2 つそれぞれは subalgebra である (積について閉じている) が、2 つの subalgebra 相互の交換関係は一般には難しいことに注意が必要である。

とにかくも, $\mathcal{WC}$ は $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ (前変数) を左から、$\pi_*\bar{\Omega}^{\mathbb{G}_m}$ (後変数) を右から掛ける意味で

$\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m} \boxtimes \pi_*\bar{\Omega}^{\mathbb{G}_m}$ 上の「ステレオ加群」の構造を持つ。

定理 0.22.3. $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m})$ 上のステレオ加群として $\mathcal{WC}$ は locally free であり、

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \big((\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m})(-l, -l\big)$$

0.23. **degree** fdeg **of elements of WC as differential forms.** 微分形式としての次数を fdeg で書くことにする。すなわち、fdeg を以下で定義する。

変数	X_i	$\bar{X}_i$	E_i	$\bar{E}_i$	k	C
fdeg	$(0,0)$	(0,0)	(1,0)	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$

あとで見るように、fdeg は WC は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上のある種の微分形式の全体の層の作用 (“ステレオ作用”) をうけ、fdeg は微分形式の次数と協調的である。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.25 要約

0.25. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ **での層** $\mathcal{A}$**,** $\mathfrak{A}$ **と** $\mathfrak{WC}$ **の定義.** $\mathcal{A}$ は $\mathcal{WC}$ に $\mu_{(k,0)} = C$ を課した環として定義したい。

$$\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{WC}/(\mu_{(k,0)} - C)$$

が、

$$k^p \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p = \mu_{(k,0)}^p - (khC)^{p-1}\mu_{(k,0)} = k^p(1 - h^{p-1})C^p$$

で、必然的に $k^p((\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p) - (1 - h^{p-1})C^p) = 0$ を得る。

そこで我々は更に $(\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p) - (1 - h^{p-1})C^p) = 0$ を課した環を補助的に考えることにしよう。つまり、

$$\mathfrak{A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{WC}/(\mu_{(k,0)} - C, \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p) \cong \mathcal{A}/(\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p)$$

と定義することにする。ついでに、

$$\mathfrak{WC} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{WC}/(\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1})C^p)$$

と定義しておく。要するに、イデアル $(\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1-h^{p-1})C^p)$ で割って、 C^p を消去できるようにしたものを fraktur で書いた記号のもので表そうというわけである。これらは以下で必須というわけではなさそうだが、一般の射影多様体を考えるための試験台として使える。

$$\mathfrak{WC} = \bigoplus_{l=0}^{p-1} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}(-l, -l)$$

※ $(-l, -l)$ は serre twist の意味だが、$\mathcal{O}^{(p)}$ 上ではなく $\mathcal{O}$ 上の Serre twist のいみである。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.30 要約

0.30. **Ultrafilter による標数 0 への移行.** この件についても何度も書いている。kaehler3.pdf

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/TALK/kaehler3/kaehler3.pdf`

(`kaehler3.pdf`) を参照のこと。Web からリンクをたどるには、土基のページ (日本語版) →古いページとたどって、広島大学 (2014/11/05) での「話したり、話したかったことのノート」に行くとよい。

ultra product の話になるわけだが、この話は affine scheme の理論を使えばかなり整理することができる。

基本的な主張と注意

集合 Λ によって index つけられた 体の族 $\{K_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ を考える。

(1) 直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ をとる。
   (a) $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ のイデアルは Λ の filter と一対一に対応する。
   (b) $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ の素イデアルは必ず極大であり、極大イデアルは Λ の極大フィルターと一対一に対応する。

(2) $\mathrm{Spec}(\prod_{\lambda\in\lambda} K_\lambda)$ は Λ に離散位相を入れたものの最大コンパクト化 (Stone-Čech コンパクト化) と同相である。

(3) $\mathfrak{U}$ における 超積 $K_\mathfrak{U}$ は $\mathrm{Spec}(\prod_\lambda K_\lambda)$ における structure sheaf の stalk と一致する。したがって、「"limit"」 とこれまで土基が呼んできたものは germ と呼べばよい。

(4) $K_\mathfrak{U}$ は体である。K_λ の 標数 $\mathrm{char}(K_\lambda)$ が $\lambda \to \mathfrak{U}$ の極限で ∞ に収束するなら、$K_\mathfrak{U}$ の標数は 0 である。

(5) Λ としては素数全体の集合 P をとり、 K_λ としては $\mathbb{F}_p$ を考えるというのが土基の基本的なやり方であった。もちろんそれ以外でもよい。

(6) K_λ としてすべて体 $\mathbb{R}$ を採用すれば、超準解析の世界が出現する。(ただし、完全に超準解析をするためには、論理の超準化も必要になる。論理を moduli 空間の相互関係のように捉えれば、論理の超準化も理解しやすいかもしれない。)

Stone-Čech compact 化については wiki を参照のこと。

`https://en.wikipedia.org/wiki/Stone%E2%80%93%C4%8Cech_compactification`

言いたいことの (結果だけだが) 半分ぐらいは書いてあった。

(2) (a) の対応は、次のように定義される:

$\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ のイデアル I にたいして $\mathcal{F}_I = \{V(f); f \in I\}$ を対応させ、Λ のフィルター $\mathcal{F}$ に対しては、$\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ のイデアル $I_\mathcal{F} = \{f; V(f) \in \mathcal{F}\}$ を対応させる。ただし、$f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_\lambda K_\lambda$ に対して、$V(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\lambda \in \Lambda; f_\lambda = 0\}$ である。

$$\chi_f \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 1 & (\text{if } f_\lambda \neq 0 \\ 0 & (\text{if } f_\lambda = 0 \end{cases}$$

とおけば、 $f \in I \Leftrightarrow \chi_f \in I$ であり、この性質を用いても (2)(a) の 対応を記述できる。

(2)(b) の前半の証明の肝: I が素イデアルだとする。$A, B \in \Lambda$, $A \coprod B = \Lambda$ とすると、$\chi_A + \chi_B = 1, \chi_A \chi_B = 0$ ゆえ、$\chi_A \in I$ or $\chi_B \in I$.

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.34 要約

0.34. **$\mathfrak{U}$-解析学.** ◎ **height** height の考えはもともと有理数に対してのものだと思うが、それを有限体に戻してくることにより、有限体の超積を使った我々の議論に「大きさ」(ユークリッド距離」を持ち込むことができる。

$p \equiv -1(4)$ なる素数の全体を P_3 とおく。各 $p \in P_3$ に対して、$\mathbb{F}_{p^2}$ 内の -1 の平方根を一つ選び、$\sqrt{-1}$ と書くことにする。$x \in \mathbb{F}_{p^2}$ に対して、その "height" と "logarithmic height" を以下で定義する。

$$\mathrm{Ht}_p(x) = \min\left\{ |a|+|b|+|c|+|d| \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d, \in \mathbb{Z}, \\ bd \notin p\mathbb{Z}, \\ x = a/b + c/d\sqrt{-1} \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{ht}_p(x) = \log_p(\mathrm{Ht}_p(x)) \qquad (\text{"logarithmic height"})$$

$\mathbb{F}_{p^2}$ の元 x, y に対して、その 和、差の height は x, y の height による上からの評価式を持つ。実際、

$$(a/b+c/d\sqrt{-1})+(e/f+g/h\sqrt{-1}) = ((af+be)/bf)+((ch+dg)/dh)\sqrt{-1}$$

ゆえ、$\mathrm{Ht}_p(x+y) \leq 6\,\mathrm{Ht}_p(x)\,\mathrm{Ht}_p(y)$. logarithmic height でいえば、

$$\mathrm{ht}_p(x+y) \leq \mathrm{ht}_p(x) + \mathrm{ht}_p(y) + \log_p(6).$$

同様に、

$$(a/b+c/d\sqrt{-1})(e/f+g/h\sqrt{-1}) = (aedh-cgbf)/bfdh+(agdf+cebh)/bfdh\sqrt{-1}$$

ゆえ、

$$\mathrm{Ht}_p(xy) \leq 4\,\mathrm{Ht}_p(x)^2\,\mathrm{Ht}_p(y)^2.$$

logarithmic height でいえば、

$$\mathrm{ht}_p(xy) \leq 2\,\mathrm{ht}_p(x) + 2\,\mathrm{ht}_p(y) + \log_p(4).$$

命題 0.34.1. 任意の $f \in \mathbb{Z}[X]$ に対して、ある正定数 C, D が存在して、任意の p に対して、

$$\mathrm{ht}_p(f(x)) \leq C\,\mathrm{ht}_p(x) + \log_p(D)$$

が成り立つ。

系 0.34.2. P_3 の ultra filter (mod 4 で 3 と等しい ultra-prime number) $\mathfrak{U}$ をとる。

$$(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow}} = \{(x_p) \in (\prod_{p \in P_3} \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U}}; \lim_{p\to\infty} \mathrm{ht}_p(x_p) = 0\}$$

と定義すると、これは $(\prod_{p\in P_3} \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U}}$ の subring である。

$x = (x_p) \in (\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow}}$ を一つとったとき、各正の実数 M にたいして、次のいずれかが起こる。

(1) $|x_p| \leq M$ が $\mathfrak{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。
(2) $|x_p| > M$ が $\mathfrak{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。

よって、x にたいして、次のいづれかが起きるということになる。

(超準 1) ある実数 M が存在して、$|x_p| \leq M$ が $\mathfrak{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。
(超準 2) 任意の実数 M にたいして、$|x_p| > M$ が $\mathfrak{U}$-ほとんどすべての p についてなりたつ。

超準 1 が起こるとき、x は有限、超準 2 が起きるとき、x は無限であるということにしよう。

$$(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}} = \{x \in (\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow}};\ x \text{ は有限 }\}$$

は $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow}}$ の subalgebra であり、

$$(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}} \to \mathbb{C}$$

なる surjection が極限をとる操作により定まる。その kernel は「無限小全体のなす $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}}$ のイデアル」 である。すなわち、$\mathbb{C}$ は $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}}$ の subquotient である。このような状況は超準解析でよく見られる。

問題 0.1. $(\prod \mathbb{F}_{p^2})_{\mathfrak{U},\mathrm{slow},\mathrm{finite}}$ 上の「解析学」を完成させよ。(とくに、複素解析学、複素多様体論に興味がある。)

疑問:

Harmonic theory のような解析のうち、cohomology のような実は $\mathbb{F}_p$ (もしくは $\mathbb{Z}$) 上で定義されるような話 (例えば、多様体 M 上の Harmonic forms は $H^k(M,\mathbb{R})$ の元を与えるが、$H^k(M,\mathbb{R})$ は $\mathbb{Z}$ 上の $H^k(M,\mathbb{Z})$ を係数拡大したものとみなせる。) は $\mathbb{F}_p$ (もしくは $\mathbb{Z}$) だけですむように出来ないだろうか?

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.36 要約

0.36. $\mathcal{U}$**-解析学 (補足).** 注意:本稿は別の目的のために書かれたものだが、途中の結果が必要になるので付け加えておく。最後の方は関係ないが一応残してある。

◎ height の話の補遺

要するに: $\mathbb{F}_p$ と $\mathbb{Q}$ とは height を p に関して小さめに取ればよく似ていることを本稿では示す。これを用いれば、Cauchy 列 etc を用いて完備化するときに p と height に気をつけてさえいれば $\mathbb{Q}$ の完備化 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{F}_p$ からも似たように作れるし、$\mathbb{C}$ でも同じように作れるということがわかる。

0.37. **基本写像.** p は素数であるとする。この考察では、次のような写像を考察する。ここでは簡単のためこの写像を基本写像とよぼう。

$$f:\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},|m|<\sqrt{p},0<n<\sqrt{p}\}\ni\frac{m}{n}\mapsto\frac{m}{n}\in\mathbb{F}_p$$

次のことが大事である。

命題 0.37.1. 基本写像は全射である。

Proof. 明らかに、$0=f(0)\in\mathrm{Image}(f)$. 以下、簡単のため $k_0=\lfloor\sqrt{p}\rfloor$ とおく。$x\in\mathbb{F}_p^\times$ をとろう。$k=0,1,\dots,k_0$ に対して、$kx\in\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考える。すなわち、

$$0,x,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ \dots,k_0x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(\subset\mathbb{R}/p\mathbb{R})$$

これは、長さ p の円周上に k_0+1 個の異なる点が載っていることになる。したがって、それらの中から異なる 2 点を選んだ時の距離の最小値は $\dfrac{p}{k_0+1}$ 以下である。すなわち、

$$||n_2x-n_1x||_{\mathbb{R}/p\mathbb{R}}\le\frac{p}{k_0+1}\quad(0\le\exists n_1<\exists n_2\le k_0)$$

$n=n_2-n_1$ とおくと、$n\in[1,m_0]$ である。また $nx=m$ であって、$|m|<\frac{p}{k_0+1}$ をみたす $m\in\mathbb{Z}$ が存在することになる。

m の取りうる範囲を考えてみよう。k_0 の定義により、

$$p<(k_0+1)^2.$$

ゆえに、$p/k_0+1<(k_0+1)$. よって、 $|m|<k_0+1$. 整数同士の比較なので、結局、$|m|\le k_0$ である。 □

0.38. **いくつかの集合の定義.** 基本写像の考察のため、いくつかの集合を定義しておく。毎回 $\sqrt{p}$ と書くのは少々うざったいので、代わりに正の数 α を用いる。まず、基本写像の定義域にあたるものを X_α とおく。すなわち、

$$X_\alpha=\left\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},|m|<\alpha,0<n<\alpha\right\}.$$

つぎに、$\alpha>0$ に対して次の重要な集合を定義する。

$$I_\alpha=\left\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},0<m<n<\alpha\right\}.$$

つぎの記法はまあまあスタンダードだ。

$$I_\alpha^{-1}=\left\{x^{-1}|x\in I_\alpha\right\}.$$

0.39. **集合たちの関係と元の個数.** X_α は符号を変える操作に関して対称である。

$$X_\alpha = -(X_\alpha)_{>0} \coprod \{0\} \coprod (X_\alpha)_{>0}$$

さらに、$(X_\alpha)_{>0}$ は逆数を取る操作について対称で、

$$(X_\alpha)_{>0} = I_\alpha \coprod \{1\} I_\alpha^{-1}.$$

最後に、

$$I_\alpha = \coprod_{2\leq n<\alpha} \left\{ \frac{m}{n} | 0 < m < n; \gcd(m,n) = 1 \right\}.$$

右辺の一つ一つの元の個数はオイラー標数 $\varphi(n)$ に等しい。よって、

$$\# I_\alpha = \sum_{2\leq n<\alpha} \varphi(n)$$

さかのぼって、

$$\# X_\alpha = 4 \left(\sum_{2\leq n\alpha} \varphi(n) \right) + 3$$

0.40. **基本写像のファイバー.**

命題 0.40.1. 素数 p と基本写像 f について、次が成り立つ。

(1) 基本写像 f のファイバーの元の個数は 1 もしくは 2 である。
(2) $f(x_1) = f(x_2)$ で、$x_1 \neq x_2$ なるものは、

$$A_p = \{a,b,c,d \in \mathbb{Z} | ab + cd = p,\ 1 \leq a,b,c,d \leq \sqrt{p}\}$$

の元と 1 対 1 に対応する。

Proof. $x_1, x_2 \in X_{\sqrt{p}}$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$ とする。定義により、

$$x_1 = \frac{m_1}{n_1}, x_2 = \frac{m_2}{n_2}; \quad m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z},\ 0 < n_1, n_2, |m_1|, |m_2| < \sqrt{p}$$

と書くことができる。$f(x_1) = f(x_2)$ により、

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 \in p\mathbb{Z}$$

が従うが、他方で大きさについての制限により、

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| < 2\sqrt{p}^2 = 2p.$$

また、$x_1 \neq x_2$ により、

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| \neq 0.$$

よって、

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| = p.$$

必要なら x_1 と x_2 の役割を入れ替えて、

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = p$$

としてよい。再び大きさについての制限により、m_1 と m_2 の符号は異ならなければならず、

$$m_1 = a_1, m_2 = -a_2 (0 < \exists a_1, a_2 < \sqrt{p}).$$

$$a_1 n_2 - a_2 n_1 = p$$

あとはあきらかだろう。 □

系 0.40.2. 基本写像を "Ht $\leq \frac{\sqrt{p}}{2}$ の範囲"

$$\{\frac{m}{n}; m, n \in Z; |m| < \frac{\sqrt{p}}{2}, 0 < n < \frac{\sqrt{p}}{2}\}$$

に制限したものは単射である。

以下は直接は関係ない。

◎ 注意 A_p の元 (a, b, c, d) から $a/c \in \mathbb{F}_p^\times$ への対応は単射である。とくに、

$$0 \leq \#A_p \leq p - 1.$$

0.41. **基本写像から得られる等式.**

$$4\left(\sum_{2\leq n<\sqrt{p}} \varphi(n)\right) + 3 - \#A_p = p$$

数値実験によれば、$p \sim 10^9$ 周辺では、$\#A_p \sim p/4.63$.

$$b_m = 4\sum_{2\leq n\leq m} \varphi(n) + 3, \quad a_p = \#A_p$$

とおく。前の結果によると、$b_{\lfloor\sqrt{p}\rfloor} = p + a_p$ である。

totient の wikipedia の記述を見れば、totient の和の挙動がわかり、4.63... のところが説明できる。実際、

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi(n) = \frac{3m^2}{\pi^2} + \dots$$

であるから、$a_p \sim \left(4(\frac{3p}{\pi^2} - p)\right) = p/(4.632756661...)$ である。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.040
要約

0.40. C **の消去。.** ここから先、しばらく「有限の場合」を考える。すなわち、$\mu_0 = k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i$, $\mu_1 = \mu_0 + C$ とおき、$\mathcal{WC}$ を μ_1 で生成されるイデアルで割ることを考える。すなわち、$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の層 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \mathcal{WC}/(\mu_1)$$

で決めて $\mathcal{A}$ について考える。

(※ μ_1 は form degree について斉次ではない。したがって、fdeg によって $\mathcal{A}$ を complex と見ることができない。しかし、以下に見るように C は消去してよく知った複体と $\mathcal{A}$ を同一視できるので、後付で $\mathcal{A}$ を複体と見ることができる。)

$\mathcal{WC} = \bigoplus_{l\geq 0}\Omega[\partial \log X_0]\cdot X_0^{-l}C^l\bar{X}_0^{-l}\cdot\bar{\Omega}[\bar{\partial}\log\bar{X}_0]$ であった。

$\{X_0 \neq 0 \& \bar{X}_0 \neq 0\}$ なる open set で考える。$\mu_1 = 0$ から得られる非斉次形:

$$X_0^{-1}C\bar{X}_0^{-1} - k\sum_i X_0^{-1}X_i\bar{X}_i\bar{X}_0^{-1} + \sum_i \bar{X}_0^{-1}E_i\bar{E}_i\bar{X}_0^{-1}$$

を代入すれば、終わりと考えるとさにあらず。代入のとたん前変数と後ろ変数が入り交じるからで、これを直そうと交換関係を用いると C が出てきてしまう。

この問題の答は一次方程式を解くことで得られる。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.42 要約

0.42. $\mathcal{B}$ **の構造.** $\mathcal{B}$ の構造を述べておかねばならない。基本的には正規順序 (normal ordering) に合わせてならび変えるだけなのであるが、

(1) 必要以上に環のサイズが減っていないこと。
(2) 正規順序に並び替える際に C が現れるが、C 自体が μ_0 という若干複雑な元で置き換えられて、また新たな並び替えが必要になること。

に注意が必要である。

以下、添字 $\mathbb{i}$ は 0 から n まで、 $\mathbb{j}$ は 1 から n まで動くことにする。たとえば $X_{\mathbb{i}} = \{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ である。

環 A や B の生成元と関係式はかなり簡単にわかる。サイズが減らないのを調べるにはそれらの環の正則表現にあたるおのを実際に構成して見せるのが定跡ではあるが、それは面倒なので、扱う環の推移に注意しながら、既存の Weyl 環等の構造論を使うことにする。

(1) $\mathrm{WC}_{n+1} = \Bbbk_2\langle X_{\mathbb{i}}, \bar{X}_{\mathbb{i}}, E_{\mathbb{i}}, \bar{E}_{\mathbb{i}}, C\rangle$ から始める。これは $\Bbbk_2$ 上 free であり、$\Bbbk_2$ 上の $2n+3$ 変数可換多項式環上の微分形式の全体のなす環とサイズが同じである。(既知の一般論) もっと具体的には、$\operatorname{Spec}\Bbbk[X_0^p, \dots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \dots, \bar{X}_n^p, C^p]$ 上の rank $p^{2n+3}2^{2n+2}$ の locally free sheaf と対応する加群である。
(2) $(\mathrm{WC}_{n+1}[X_0^{-p}])_0 = \Bbbk_2\langle x_{\mathbb{j}}, e_{\mathbb{i}}, e'_{\mathbb{i}}, x'_{\mathbb{j}}, x'_0, C\rangle \cong \mathrm{WC}_{n,n+1}\langle x'_0\rangle$
　この環は $\mathbb{A}^{2n+2}$ 上の層 WC_{n+1} を $\mathbb{G}_m$ の "(1,-1)"-作用で割ったものを $U^{\heartsuit} = \{X_0 \neq 0\}$ に制限した層に対応したものである。)
注意点:
   (a) X_0^{-p} を付け加えることと X_0^{-1} を付け加えることは結果的に同じことだが、X_0^{-p} は center の元なのでこちらのほうが議論が易しい。
   (b) $x'_0 = X_0\bar{X}_0$ は 0 に関する degree $\deg_0$ の hC 倍である。

$$[x'_0, \xi] = hC\deg_0(\xi)\xi \qquad (\forall \xi \in \mathrm{WC}[X_0^{-p}].)$$

言い換えると、

$$x'_0\xi = \xi(x'_0 + hC\deg_0(\xi)) \qquad (\forall \xi \in \mathrm{WC}[X_0^{-p}].)$$

である。ただし $\deg_0$ は以下で決まるような次数付け。

変数:	X_0	X_j	$\bar{X}_0$	$\bar{X}_j$	E_i	$\bar{E}_i$	C
$\deg_0$:	1	0	-1	0	0	0	0

この交換関係により、x'_0 変数はすべて項の後ろに持っていくことができ、$\mathrm{WC}_{n,n+1}\langle x'_0\rangle$ のサイズは $\Bbbk_2[x'_0]$ 上の $2n+1$ 変数の多項式環上の $2n+2$ 個の生成元からなる外積代数と同じサイズである。
   (c) 変数変換:
$x_i = X_0^{-1}X_i,\ x'_i = X_0\bar{X}_i,\ e_i = X_0^{-1}E_i,\ e'_i = X_0\bar{E}_i.$

変数:	x_j	x'_0	x'_j	e_i	e'_i	C
$\deg_0$:	-1	0	1	-1	1	0

(d) この時点で、$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}^{(p)}$ 上 locally free であることと、その rank がわかる。

$x_{\mathbb{j}}$ の分...p^n
$e_{\mathbb{i}}$ の分...2^{n+1}
$e'_{\mathbb{i}}$ の分...2^{n+1}
$x'_{\mathbb{j}}$ の分...p^n
x'_0 の分...p
C の 分..p
$\mathbb{G}_m$不変の要求 (*)...$1/p$

---

total....$p^{2n}2^{2(n+1)}\cdot p$

(*) 次数合わせのために x'_0 の冪で割らねばならぬ。その分。ただし、

$$B = \mathrm{WC}_{(0)}/(C^p - (\frac{k^p}{1-(hk)^{p-1}}\sum X_i^p\bar{X}_i^p))$$

(3) $(\mathrm{WC}_n[X_0^{-p},\bar{X}_0^{-p}])_{(0)}$ を考える。

(a) e'_i, x'_j を $\bar{e}_i, \bar{x}_j$ に ($x'_0, (x'_0)^{-1}$ の存在を前提に) 変数変換する。(U_{00} 上で考える。)
$e'_i = X_0\bar{E}_i = X_0\bar{X}_0\bar{X}_0^{-1}\bar{E}_i = (x'_0)\bar{e}_i, x'_i = X_0\bar{X}_i = X_0\bar{X}_0\bar{X}_0^{-1}\bar{X}_i = (x'_0)\bar{x}_i,$

(b) x'_0 を後ろに持っていく。(C が出てくる。)
項順序を $x_j < e_j < e_0 < \bar{e}_0 < \bar{e}_j < \bar{x}_j < x'_0 < C$ にとる。

変数:	x_j	e_j	e_0	$\bar{e}_0$	$\bar{e}_j$	$\bar{x}_j$	x'_0	C
$\deg_0$:	-1	-1	-1	1	1	1	0	0

(c) $(\mathrm{WC}_n[X_0^{-p},\bar{X}_0^{-p}])_{(0)} = \Bbbk\langle x_{\mathbb{j}}, e_{\mathbb{i}}, \bar{e}_{\mathbb{i}}, \bar{x}_{\mathbb{j}}, x'_0, (x'_0)^{-1}, C\rangle$

(4) total degree が 0 の部分を考える。x'_0 と他の部分との交換関係、C が center に属することから、 x'_0, C の部分を真ん中に移動させ、一旦 X_0^{-p},$\bar{X}_0^{-p}$ の高い冪を共通分母を取ってから normal ordering にならべかえることにより、次を得る。

$$(\mathrm{WC}_n[X_0^{-p},\bar{X}_0^{-p}])_{(0,0)} = \sum_t \Bbbk_1\langle k, x_{\mathbb{j}}, e_{\mathbb{i}}\rangle\cdot X_0^{-t}\bar{X}_0^{-t}C^t\cdot\Bbbk_1\langle k, \bar{e}_{\mathbb{i}}, \bar{x}_{\mathbb{j}}, x'_0, (x'_0)^{-1}\rangle$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.43 要約

0.43. C **の消去.** $\{X_0^p \neq 0 \& \bar{X}_0^p \neq 0\}$ で考えることにする。

$$\xi_s = X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}C^s$$

とおく。$\mathcal{WC}$ は ステレオ加群として $\{\xi_s\}_{s=0}^{\infty}$ で生成される。

これらは $\bar{X}_0$ と X_0 との交換関係を用いて $X_0^{-m}\bar{X}_0^{-m}C^m = X_0^{-m}C^m\bar{X}_0^{-m}$ の $\Bbbk_1$ 上の線型結合で書くことができる。

WC $/(\mu_1)$ においては、$\mu_1 = 0$ なので、$C = \mu_0$ なのだが、

$$X_0^{-s}C^s\bar{X}_0^{-s} = X_0^{-s}\mu_0^s\bar{X}_0^{-s} \qquad \text{(誤り)}$$

とやってはいけない。(μ_1) は $\mathcal{A}$ や $\mathcal{B}$ のイデアルではあるが、$\mathrm{WC}_{(0)}$ のイデアルではないから。

$C \equiv \mu_0$ なる関係式を採用する。のだが、精密化して、

$$\mu_{1,j} = \mu_1 - jkhC = (1 - jkh)C + \mu_0 \qquad (j \in \mathbb{F}_p)$$

を考える。以下、便利のため、

$$\mu_1^{[j]} = \prod_{l=0}^{j-1}(\mu_1 - lkhC)$$

とおく。WC においては $\mu_1^{[p-1]} = k^p \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p$ であることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
\xi_s &= X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s} \\
&= X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}(1-jkh)^{-1}(\mu_{1,j} - \mu_0)C^{s-1} \\
&\equiv -(1-jkh)^{-1}X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}\mu_0 C^{s-1} \\
&= -(1-jkh)^{-1}X_0^{-s}(\mu_0 \pm khsC)\bar{X}_0^{-s}C^{s-1} \\
&= -(1-jkh)^{-1}(\pm)khs\xi_s - (1-jkh)^{-1}X_0^{-s}\mu_0\bar{X}_0^{-s}C^{s-1}
\end{aligned}$$

さて、k は位相的に無限小であると仮定したので、$(1+skh)$ は $s \in \mathbb{Z}$ に対して可逆である。

他方、

$$\begin{aligned}
&X_0^{-(s-1)}(X_0^{-1}\mu_0\bar{X}_0^{(-1)})\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1} \\
=&X_0^{-(s-1)}(k(1+\sum_j x_j\bar{x}_j) + \sum_i e_i\bar{e}_i)\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1} \\
=&k(X_0^{-(s-1)}\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1} + \sum_j x_j X_0^{-(s-1)}\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}\bar{x}_j) \\
&\quad + \sum_i e_i X_0^{-(s-1)}\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}\bar{e}_i \\
=&k(\xi_{s-1} + \sum_j x_j\xi_{s-1}\bar{x}_j) + \sum_i e_i\xi_{s-1}\bar{e}_i
\end{aligned}$$

最後の等式は、交換関係を用いて外の $X_0, \bar{X}_0$ を内側に持ってきてから、該当する部分を ξ と書き換えた。結局、

$$\mathcal{WC} = \bigoplus_{l \geq 0} \Omega[\partial \log(X_0)] \mu_1^{[l]} \bar{\Omega}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)]$$

$$\mathcal{A} = \Omega[\partial \log X_0]$$

である。

0.45. **(無限小版).** ひきつづき、正標数で、「無限小の場合」について議論しよう。$\Bbbk_1 = \Bbbk[h]$, $\Bbbk_2 = \Bbbk_1[[k]]$ であったことに注意する。$\mathcal{A}$ の加群構造を決定する際には、$\Bbbk_2$-加群としての構造を見ていたわけであるが、$\bar{\mathfrak{d}}$-complex としての構造を見る際には、k を係数環の元と見るのをやめて、$\Bbbk_1$-係数で議論する。これは k の form としての degree が $(1,1)$ であるためである。

定理 0.45.1. 無限小の場合について考える。このとき、

(1) 加群の層として $\mathcal{A} \cong \pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m} \boxtimes \pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ である。$\{X_0 \neq 0 \ \& \ \bar{X}_0 \neq 0\}$ においては、次のように書いたほうがわかりいいかもしれない。

$$\mathcal{A} \cong \Omega_{\mathbb{P}^n}[\partial \log X_0] \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0]$$

以下ではこの形で書く。

(2) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex として、

$$(\mathcal{A}, \bar{\mathfrak{d}})(\cong (\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}, -k \operatorname{Int}_{\sum_i X_i \mathfrak{d}/\mathfrak{d}X_i}) \boxtimes (\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}, \bar{\mathfrak{d}}) \qquad (\operatorname{Int} \text{ は内部微分})\ )$$
$$\cong (\Omega_{\mathbb{P}^n}[\partial \log X_0], \bar{\mathfrak{d}}) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0], \bar{\mathfrak{d}})$$

である。ただし、(通常の考えと違って、) 前変数の $\bar{\mathfrak{d}}$ は

$$\bar{\partial} \log X_0 = -k$$

を満たすような $\Omega_{\mathbb{P}^n}$-線形作用素である。

(3) $\Bbbk_1$ 上の $\bar{\mathfrak{d}}$-complex として、

$$(\Omega_{\mathbb{P}^n}[\partial \log X_0], \bar{\mathfrak{d}}) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0], \bar{\mathfrak{d}})$$

は

$$(\Omega_{\mathbb{P}^n}, 0) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0], 0)$$

と導来同値である。

(4) $\mathfrak{d}$ に関しても同様である。

Proof. (1) この同型は正規順序により決まるので、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ 作用素を吟味するのはやさしい。まず $\mathcal{A}$ で吟味し、その結果を上の同型で送り込めばよいのだ。

(2) 右側、第二変数については $\bar{\mathfrak{d}}$ は通常の外微分の意味を持ち、左側、第一変数については、

$$\bar{\mathfrak{d}} = \operatorname{Int}_{\sum_i X_i \bar{\mathfrak{d}}/\bar{\mathfrak{d}}X_i}$$

が成り立つ。

$\sum_i X_i \bar{\mathfrak{d}}/\bar{\mathfrak{d}}X_i$ は Euler operator と呼ばれるものと等しいことにも注意しておこう。とくにこれは座標不変である。(2) の証明は、

$$\bar{\mathfrak{d}} x_i = 0, \quad (\bar{\mathfrak{d}}(\mathfrak{d} x_i)) = -\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}} x_i = 0$$

である ($\mathfrak{d}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$ の間の交換子は deg 作用素であることに注意) ことと、$\bar{\mathfrak{d}} e_0 = -k$ とからすぐにわかる。

(3) 前変数のコホモロジーについて考えよう。$\xi = \alpha + \beta \bar{\partial} \log(X_0)$ $(\alpha, \beta \in \Omega_{\mathbb{P}^n})$ に対して、 $\bar{\mathfrak{d}}\xi = -k\beta$ であるから、cocycle は $\Bbbk_1[k] \cdot \Omega_{\mathbb{P}^n}$ であり、coboundary は $k\Omega_{\mathbb{P}^n}$ である。

結局、前変数の complex は $(\Omega_{\mathbb{P}^n}, 0)$ と quasi isom であることがわかる。

後変数について考えよう。Cartier operator は $\bar{X}_0^{-1}\mathfrak{d}\bar{X}_0$ を不変にすることから、Deline-Illusie 理論は全くこの場合にも同じように使えて、後変数の complex は、$(\bar{\Omega}^{(p)}_{\mathbb{P}^n} + \bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}\bar{\partial}\log(X_0), 0)$ と quasi isom である。 □

この complex は cohomology 環は cup 積に関して super 可換であるはずである。したがって、cohomology に関しては可換理論と全く変わるところはない。

0.46. **有限の場合の整理.** この部分は書きかけだったり、とりあえずの記述だったりの集まりであり、土基以外の人が読むに値しない。

結果として、$\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ は $\Bbbk[\bar{X}_0\bar{\mathfrak{d}}X_0]\otimes(\Omega_{\mathbb{P}^n})_{\mathrm{DR}}$, と同型である。$\Bbbk[\bar{X}_0\bar{\mathfrak{d}}X_0]$ は $\mathbb{G}_m$ (言い換えると、S^1) のコホモロジーに対応している。

コホモロジーに関するこの考察は、$\mathcal{A}$ と $\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}\boxtimes\pi_{\Omega}^{\mathbb{G}_m}$ との同型が存在するときにのみ有効で、つまり標数 p のときのみ有効である。

課題

「free resolution 」と以下で思っているのは $\Bbbk_1[k]/(k)$ 上であるので、$\Bbbk_1[k]$ 上でやるためには Torsion ($\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$) について議論しなければならない。

定理 0.46.1. $((\pi_*\Omega_{\mathbb{A}^n_o})^{\mathbb{G}_m}, d)$ は $(\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}[d\log X_i], 0)$ と quasi-isomorphic である。

$d\log X_i$ は i に依存するが 対数微分の公式により、その差は Ω に属する。故に右辺に現れる sheaf は well-defined であることに注意。(書き方はもっといいやつがほしいところだ。)

$(\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}[d\log X_i], 0)$ は右辺の free resolution である。よって、$\mathbb{R}\Gamma$ が気楽に取れる。ついでに、$\mathbb{P}^n$ の submanifold X の定義イデアル I に対し、$\pi_*\Omega_{\mathbb{A}^n_o})^{\mathbb{G}_m}, d \bmod I^p$ も flatness により良いものだとわかり、$\mathrm{mod}\ I^p$ での cohomology の問題が解決する。

別の問題: 標数 p から 標数 0 への移行はどのくらい可能であろうか?

A が有限生成であることから、すべてはうまく行くように思われる。– と言いたいところだが、どのカテゴリーを相手にするかによって問題が根本的に異なる。$\mathcal{A}^{(p)}$-module としてならばコホモロジーはたいそう易しいが、標数 0 での意味を失う。

0.46.1. ノート. f が affine morphism であれば、 f_* は exact functor なのであった。とくに f_* は cohomology の間の同型を誘導する。

$\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$ のうえに $\mathcal{A}$ と $\mathcal{O}^{(p)}$ が二重帝国を築いているのはそのように見れば見やすい。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIV E KÄHLER MANIFOLD NO.47
要約

0.47. **homology 代数的考察 (無限小の場合).** $\mathcal{A} = \mathcal{WC}/(\mu_1)$ であった。

$0 \to \mathcal{WC}(-1,-1) \overset{\mu_1\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{A} \to 0$:exact.

$\mu_1\times$ の cone を考えれば、これは $\mathcal{A}$ と homological に 同型。

さらに、$0 \to \mathcal{WC}(-1,-1) \overset{\mu_1\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{A} \to 0$ と $0 \to \mathcal{WC}(-1,-1) \overset{C\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{A} \to 0$ とは homotopy 同値 ($\bar{\varepsilon}$ が $\mu_1 - C = \mu_0$ のホモトピーを与える:

$$\mu_1 - C = \mu_0 = \bar{\mathfrak{d}}\bar{\varepsilon} + \varepsilon\bar{\mathfrak{d}}$$

よって、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{WC}/(C)$ とは quasi isomorphic ということがわかる。$\mathcal{WC}/(C) \cong \Omega[\partial \log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\partial} \log(\bar{X}_0)]$ であるから、$\mathcal{A}$ の $\bar{\mathfrak{d}}$-cohomology と $\Omega[\partial \log(X_0)] \boxtimes \bar{\Omega}[\bar{\mathfrak{d}} \log(\bar{X}_0)]$ の $\bar{\mathfrak{d}}$-cohomology (ただし $\bar{\mathfrak{d}}$ は通常想起するものとは少し違う) とは同型である。

この考察では、h, k に関する特別の考察が必要なくなっていることに注意する。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.50 要約

0.50. **有限の場合の整理.** No.050-No.059 は「有限の場合」をまとめておくことにする。

「無限小の場合」を下敷きに書き換えて原稿作成中につき、おかしいところが満載なので読む場合には注意のこと。

係数環として $\Bbbk_2 = \Bbbk[h, \frac{1}{1-h^{p-1}}][k]$ を採用し、No.020 で定義した Weyl-Clifford algebra WC_{n+1} をつかう。(正確には、020 での定義と定数や係数環の取り扱いが少し異なるが、ほとんど同じものをもう一度書くのは面倒なのであとで直すことにする。) moment map として $\mu = \sum_i X_i\bar{X}_i + \frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i - C$ を用いて、

$$A = (\mathrm{WC}_{n+1})_{(0)}/(\mu)$$

を考えよう。

$\mathcal{A}$ では

$$C^p - (hC)^{p-1}C = \sum_i X_i^p\bar{X}_i^p$$

であるから、

補題 0.50.1. $\mathcal{A}$ では

$$C^p = \frac{1}{1-h^{p-1}}\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p.$$

このことから、 A に対応する $\mathrm{Proj}(\Bbbk_2[\{X_i^pX_k^p\}]) = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の quasi coherent sheaf $\mathcal{A}$ は 実際には finite rank (ゆえに、coherent) であることがわかる。

$\mathrm{WC}_{(0)}/(C^p - (\frac{1}{1-h^{p-1}}\sum X_i^p\bar{X}_i^p))$ のことを B と書き、B に付随する $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層を $\mathcal{B}$ と書く。

定義 0.50.2. $m = \frac{1}{k}\sum_i \mathfrak{d}X_i\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$ とおき、

$$\mathcal{F} = ((\pi_*\Omega) \boxtimes (\pi_*\Omega)[m])^{\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m}$$

と定義する。

局所的には、次のように書ける:

$$m_0 \overset{\mathrm{def}}{=} X_0^{-1}m\bar{X}_0 = \frac{1}{k}\left((\partial\log\bar{X}_0) + \sum_{j=1}^{n}(\partial\log X_0)(\bar{\partial}\log\bar{X}_0)\right)$$

と置くと、

$$\mathcal{F} = (\Omega_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^n})[\partial\log\bar{X}_0, m_0]$$

である。

定義 0.50.3. $\mathcal{B}$ は $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ (第 1 変数) を左から、$(\pi_*\bar{\Omega})^{\mathbb{G}_m}$ (第 2 変数) を右から掛けることで $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$-加群の構造を持つ。この作用を $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の $\mathcal{B}$ への**ステレオ作用**と呼ぶことにする。ついでに、$(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の**ステレオ作用** をもつ加群を**ステレオ加群**と呼ぶことにする。

FIXME

以下、(No.55 まで) m や m_0 が入った形で書いてあるものが正しい。入っていないのはまだ書き換えの途中だからである。

命題 0.50.4. $(\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ の B へのステレオ作用は $\mathcal{F}$ の $\mathcal{B}$ への作用に一意的に拡張できる。

命題 0.50.5.

$$\oplus_{l=0}^{p-1}\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(-1,-1)^l \cong \mathcal{B}.$$

右、左の区別を明確にして、きちんと書くと、

$$\oplus_{l=0}^{p-1}\left(\left((\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes 1\right) \otimes \mathcal{O}(-1,-1)^l \otimes \left(1 \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}\right)\right) \cong \mathcal{B}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\oplus_{l=0}^{p-1}\left(\left((\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m} \boxtimes 1\right) \otimes \mathcal{O}(-1,-1)^l \otimes \left(1 \boxtimes (\pi_*\Omega)^{\mathbb{G}_m}\right)\right)\\
&\ni (\alpha_{\lambda,l} \otimes 1 \otimes \beta_{\lambda,l})_{\lambda,l}\\
&\mapsto\\
&\sum_{l,\lambda} \alpha_{\lambda,l}\mu^l\beta_{\lambda,l} \in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

を考えよう。これは、全射 (No.28 のテクニック)、かつ、定義域と終域はランクが等しい $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)_{\mathrm{Spec}(\Bbbk_2)}$ 上の locally fee sheaf である。(No.21,24) よって、Φ は加群の層の同型を与える。

□

系 0.50.6. 掛け算から定義される写像により、次の加群の層としての同型が得られる。

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{A}.$$

もちろん、環としては両辺は全く異なるわけだが、cohomology を計算するにはさしあたってこれで十分である。No.055 にその結果が陳述してある。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.52 要約

0.52. $\mathcal{B}$ **の構造.** この節は手直しが必要である。

$\mathcal{B}$ の構造を述べておかねばならない。基本的には正規順序 (normal ordering) に合わせてならび変えるだけなのであるが、

(1) 必要以上に環のサイズが減っていないこと。
(2) 正規順序に並び替える際に C が現れるが、C 自体が μ_0 という若干複雑な元で置き換えられて、また新たな並び替えが必要になること。

に注意が必要である。

以下、添字 $\mathbb{i}$ は 0 から n まで、 $\mathbb{j}$ は 1 から n まで動くことにする。たとえば $X_{\mathbb{i}} = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ である。

環 A や B の生成元と関係式はかなり簡単にわかる。サイズが減らないのを調べるにはそれらの環の正則表現にあたるおのを実際に構成して見せるのが定跡ではあるが、それは面倒なので、扱う環の推移に注意しながら、既存の Weyl 環等の構造論を使うことにする。

(1) $\mathrm{WC}_{n+1} = \Bbbk_2[X_{\mathbb{i}}, \bar{X}_{\mathbb{i}}, E_{\mathbb{i}}, \bar{E}_{\mathbb{i}}, C]$ から始める。これは $\Bbbk_2$ 上 free であり、$\Bbbk_2$ 上の $2n+3$ 変数可換多項式環上の微分形式の全体のなす環とサイズが同じである。(既知の一般論) もっと具体的には、$\mathrm{Spec}\,\Bbbk[X_0^p, \ldots, X_n^p, \bar{X}_0^p, \ldots, \bar{X}_n^p, C^p]$ 上の rank $p^{2n+3}2^{2n+2}$ の locally free sheaf と対応する加群である。
(2) $(\mathrm{WC}_{n+1}[X_0^{-p}])_0 = \Bbbk_2[x_{\mathbb{j}}, e_{\mathbb{i}}, e'_{\mathbb{i}}, x'_{\mathbb{j}}, x'_0, C] \cong \mathrm{WC}_{n,n+1}[x'_0]$

この環は $\mathbb{A}^{2n+2}$ 上の層 WC_{n+1} を $\mathbb{G}_m$ の "(1,-1)"-作用で割ったものを $U^{\heartsuit} = \{X_0 \neq 0\}$ に制限した層に対応したものである。)

注意点:

(a) X_0^{-p} を付け加えることと X_0^{-1} を付け加えることは結果的に同じことだが、X_0^{-p} は center の元なのでこちらのほうが議論が易しい。

(b) $x'_0 = X_0\bar{X}_0$ は 0 に関する degree $\deg_0$ の hC 倍である。

$$[x'_0, \xi] = hC\deg_0(\xi)\xi \qquad (\forall \xi \in \mathrm{WC}[X_0^{-p}].)$$

言い換えると、

$$x'_0\xi = \xi(x'_0 + hC\deg_0(\xi)) \qquad (\forall \xi \in \mathrm{WC}[X_0^{-p}].)$$

である。ただし $\deg_0$ は以下で決まるような次数付け。

変数:	X_0	X_j	$\bar{X}_0$	$\bar{X}_j$	E_i	$\bar{E}_i$	C
$\deg_0$:	1	0	-1	0	0	0	0

この交換関係により、x'_0 変数はすべて項の後ろに持っていくことができ、$\mathrm{WC}_{n,n+1}[x'_0]$ のサイズは $\Bbbk_2[x'_0]$ 上の $2n+1$ 変数の多項式環上の $2n+2$ 個の生成元からなる外積代数と同じサイズである。

(c) 変数変換:

$x_i = X_0^{-1}X_i,\ x'_i = X_0\bar{X}_i,\ e_i = X_0^{-1}E_i,\ e'_i = X_0\bar{E}_i.$

変数:	x_j	x'_0	x'_j	e_i	e'_i	C
$\deg_0$:	-1	0	1	-1	1	0

(d) この時点で、$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}^{(p)}$ 上 locally free であることと、その rank がわかる。

$x_{\mathbb{j}}$ の分...p^n
$e_{\mathbb{i}}$ の分...2^{n+1}
$e'_{\mathbb{i}}$ の分...2^{n+1}
$x'_{\mathbb{j}}$ の分...p^n
x'_0 の分...p
C の 分..p
$\mathbb{G}_m$不変の要求 (*)...$1/p$

---

total....$p^{2n}2^{2(n+1)} \cdot p$

(*) 次数合わせのために x'_0 の冪で割らねばならぬ。その分。ただし、

$$B = \mathrm{WC}_{(0)} /(C^p - (\frac{1}{1-h^{p-1}} \sum X_i^p \bar{X}_i^p))$$

(3) $(\mathrm{WC}_n[X_0^{-p}, \bar{X}_0^{-p}])_{(0)}$ を考える。
(a) e'_i, x'_j を $\bar{e}_i, \bar{x}_j$ に ($x'_0, (x'_0)^{-1}$ の存在を前提に) 変数変換する。(U_{00} 上で考える。)
$e'_i = X_0\bar{E}_i = X_0\bar{X}_0\bar{X}_0^{-1}\bar{E}_i = (x'_0)\bar{e}_i, x'_i = X_0\bar{X}_i = X_0\bar{X}_0\bar{X}_0^{-1}\bar{X}_i = (x'_0)\bar{x}_i,$
(b) x'_0 を後ろに持っていく。(C が出てくる。)
項順序を $x_j < e_j < e_0 < \bar{e}_0 < \bar{e}_j < \bar{x}_j < x'_0 < C$ にとる。

変数:	x_j	e_j	e_0	$\bar{e}_0$	$\bar{e}_j$	$\bar{x}_j$	x'_0	C
$\deg_0$:	-1	-1	-1	1	1	1	0	0

(c) $(\mathrm{WC}_n[X_0^{-p}, \bar{X}_0^{-p}])_{(0)} = \Bbbk[x_{\mathbb{j}}, e_{\mathbb{i}}, \bar{e}_{\mathbb{i}}, \bar{x}_{\mathbb{j}}, x'_0, (x'_0)^{-1}, C]$

(4) total degree が 0 の部分を考える。x'_0 と他の部分との交換関係、C が center に属することから、 x'_0, C の部分を真ん中に移動させ、一旦 X_0^{-p},$\bar{X}_0^{-p}$ の高い冪を共通分母を取ってから normal ordering にならべかえることにより、次を得る。

$$(\mathrm{WC}_n[X_0^{-p}, \bar{X}_0^{-p}])_{(0,0)} = \sum_t \Bbbk_1[k, x_{\mathbb{j}}, e_{\mathbb{i}}]\cdot X_0^{-t}\bar{X}_0^{-t}C^t\cdot \Bbbk_1[k, \bar{e}_{\mathbb{i}}, \bar{x}_{\mathbb{j}}, x'_0, (x'_0)^{-1}]$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.53 要約

0.53. C **の消去.** この節も手直しが必要である。
52 で述べたように $\mathcal{B}$ は $(\Omega)^{\mathbb{G}_m}$- - $(\Omega)^{\mathbb{G}_m}$ 両側加群として

$$(X_0^{-p}\bar{X}_0^{-p})^k(x_0')^lC^m$$

$(-2kp+l+m=0\ )$ のかたちの元で生成される。
これらは $\bar{X}_0$ と X_0 との交換関係を用いて $X_0^{-m}\bar{X}_0^{-m}C^m = X_0^{-m}C^m\bar{X}_0^{-m}$ の $\mathbb{k}_1$ 上の線型結合で書くことができる。
$\mathcal{A}$ や $\mathcal{B}$ においては、$\mu_1=0$ なので、$C=\mu_0$ なのだが、

$$\text{(誤り)}\qquad X_0^{-s}C^s\bar{X}_0^{-s} = X_0^{-s}\mu_0^s\bar{X}_0^{-s}$$

とやってはいけない。(μ_1) は $\mathcal{A}$ や $\mathcal{B}$ のイデアルではあるが、$\mathrm{WC}_{(0)}$ のイデアルではないから。

$$\xi_s = X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}C^s$$

とおく。$C\equiv\mu_0$ なる関係式を採用する。のだが、精密化して、

$$\mu_{1,j} = \mu_1 - jkhC = (1-jkh)C+\mu_0$$

を考える。以下、便利のため、

$$\mu_1^{[j]} = \prod_{l=0}^{j-1}(\mu_1 - lkhC)$$

とおく。$\mathcal{B}$ においては $\mu_1^{[p-1]} = k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p$ であることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
\xi_s &= X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}\\
&= X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}(1-jkh)^{-1}(\mu_{1,j}-\mu_0)C^{s-1}\\
&\equiv -(1-jkh)^{-1}X_0^{-s}\bar{X}_0^{-s}\mu_0C^{s-1}\\
&= -(1-jkh)^{-1}X_0^{-s}(\mu_0\pm khsC)\bar{X}_0^{-s}C^{s-1}\\
&= -(1-jkh)^{-1}(\pm)khs\xi_s - (1-jkh)^{-1}X_0^{-s}\mu_0\bar{X}_0^{-s}C^{s-1}
\end{aligned}$$

さて、k は位相的に無限小であると仮定したので、$(1+skh)$ は $s\in\mathbb{Z}$ に対して可逆である。

他方、

$$
\begin{aligned}
&X_0^{-(s-1)}(X_0^{-1}\mu_0\bar{X}_0^{(-1)})\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}\\
=&X_0^{-(s-1)}(k(1+\sum_j x_j\bar{x}_j)+\sum_i e_i\bar{e}_i)\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}\\
=&k(X_0^{-(s-1)}\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}+\sum_j x_jX_0^{-(s-1)}\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}\bar{x}_j)\\
&+\sum_i e_iX_0^{-(s-1)}\bar{X}_0^{-(s-1)}C^{s-1}\bar{e}_i\\
=&k(\xi_{s-1}+\sum_j x_j\xi_{s-1}\bar{x}_j)+\sum_i e_i\xi_{s-1}\bar{e}_i
\end{aligned}
$$

最後の等式は、交換関係を用いて外の $X_0, \bar{X}_0$ を内側に持ってきてから、該当する部分を ξ と書き換えた。

$\mathcal{B} = \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mu_{1,j}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mu_{1,0}\\
&= \mathcal{C} + \mathcal{C}\mu_{1,0} + \mathcal{B} \cdot \mu_{1,0}\\
&= \mathcal{C} + (\mathcal{C}\mu_{1,0} + \mathcal{B}\mu_{1,1}) \cdot \mu_{1,0}\\
&= \mathcal{C} + \mathcal{C}\mu_{1,0} + \mathcal{B} \cdot \mu_{1,1}\mu_{1,0}\\
&= \mathcal{C} + \mathcal{C}\mu_{1,0} + (\mathcal{C} + \mathcal{B}\mu_{1,2}) \cdot \mu_{1,1}\mu_{1,0}\\
&= \cdots =\\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{C}\mu_1^{[j]} + k^p(\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p)\mathcal{B}
\end{aligned}
$$

中山の補題により、

$$
\mathcal{B} = \sum_{j=0}^{p-1} \mathcal{C}\mu_1^{[j]}
$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.55 要約

0.55. **(有限版).** ここはもう一度最初から考えてみないといけない。1 から、 いいえ、0 から。

ひきつづき、正標数で、「有限の場合」について議論しよう。$\Bbbk_1 = \Bbbk[h]$, $\Bbbk_2 = \Bbbk_1[[k]]$ であったことに注意する。$\mathcal{A}$ の加群構造を決定する際には、$\Bbbk_2$-加群としての構造を見ていたわけであるが、$\bar{\mathfrak{d}}$-complex としての構造を見る際には、k を係数環の元と見るのをやめて、$\Bbbk_1$-係数で議論する。これは k の form としての degree が $(1,1)$ であるためである。

定理 0.55.1. 無限小の場合について考える。このとき、

(1) 加群の層として $\mathcal{A} \cong \pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m} \boxtimes \pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}$ である。$\{X_0 \neq 0 \;\&\; \bar{X}_0 \neq 0\}$ においては、次のように書いたほうがわかりいいかもしれない。
$$\mathcal{A} \cong \Omega_{\mathbb{P}^n}[\partial \log X_0] \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0]$$
以下ではこの形で書く。

(2) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex として、
$$(\mathcal{A}, \bar{\mathfrak{d}})(\cong (\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}, -k\,\mathrm{Int}_{\sum_i X_i \mathfrak{d}/\mathfrak{d}X_i}) \boxtimes (\pi_*\Omega^{\mathbb{G}_m}, \bar{\mathfrak{d}}) \qquad (\mathrm{Int}\text{ は内部微分})\ )$$
$$\cong (\Omega_{\mathbb{P}^n}[\partial \log X_0], \bar{\mathfrak{d}}) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0], \bar{\mathfrak{d}})$$
である。ただし、(通常の考えと違って、) 前変数の $\bar{\mathfrak{d}}$ は
$$\bar{\partial} \log X_0 = -k$$
を満たすような $\Omega_{\mathbb{P}^n}$-線形作用素である。

(3) $\Bbbk_1$ 上の $\bar{\mathfrak{d}}$-complex として、
$$(\Omega_{\mathbb{P}^n}[\partial \log X_0], \bar{\mathfrak{d}}) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0], \bar{\mathfrak{d}})$$
は
$$(\Omega_{\mathbb{P}^n}, 0) \boxtimes (\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}[\bar{\partial} \log \bar{X}_0], 0)$$
と導来同値である。

(4) $\mathfrak{d}$ に関しても同様である。

Proof. (1) この同型は正規順序により決まるので、$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ 作用素を吟味するのはやさしい。まず $\mathcal{A}$ で吟味し、その結果を上の同型で送り込めばよいのだ。
(2) 右側、第二変数については $\bar{\mathfrak{d}}$ は通常の外微分の意味を持ち、左側、第一変数については、
$$\bar{\mathfrak{d}} = \mathrm{Int}_{\sum_i X_i \bar{\mathfrak{d}}/\bar{\mathfrak{d}}X_i}$$
が成り立つ。

$\sum_i X_i \bar{\mathfrak{d}}/\bar{\mathfrak{d}}X_i$ は Euler operator と呼ばれるものと等しいことにも注意しておこう。とくにこれは座標不変である。(2) の証明は、
$$\bar{\mathfrak{d}}x_i = 0, \quad (\bar{\mathfrak{d}}(\mathfrak{d}x_i)) = -\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}x_i = 0$$
である ($\mathfrak{d}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$ の間の交換子は deg 作用素であることに注意) ことと、$\bar{\mathfrak{d}}e_0 = -k$ とからすぐにわかる。

(3) 前変数のコホモロジーについて考えよう。$\xi = \alpha + \beta\bar{\partial}\log(X_0)$ $(\alpha, \beta \in \Omega_{\mathbb{P}^n})$ に対して、 $\bar{\mathfrak{d}}\xi = -k\beta$ であるから、cocycle は $\Bbbk_1[k] \cdot \Omega_{\mathbb{P}^n}$ であり、coboundary は $k\Omega_{\mathbb{P}^n}$ である。

結局、前変数の complex は $(\Omega_{\mathbb{P}^n}, 0)$ と quasi isom であることがわかる。

後変数について考えよう。Cartier operator は $\bar{X}_0^{-1}\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_0$ を不変にすることから、Deline-Illusie 理論は全くこの場合にも同じように使えて、後変数の complex は、$(\bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}^{(p)} + \bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}\bar{\partial}\log(X_0), 0)$ と quasi isom である。 $\square$

この complex は cohomology 環は cup 積に関して super 可換であるはずである。したがって、cohomology に関しては可換理論と全く変わるところはない。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.60 要約

0.60. **小まとめ.** 2017 年 12 月 19 日現在の進め方の方針は次の通り。

(1) 斉次 Weyl-Clifford algebra の stereo action を用いて加群として $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の層 $\mathcal{WC}$ を作る。この部分は標数 0 でもできる。
(2) $\mathcal{O}^{(p)}$ 加群と見て $\mathcal{WC}$ を sheaf of algebra と捉えることもできる。
(3) moment map で割る。
(4) 割るのは割るのだが、(ホモロジー代数の意味での)「complex」とみる。(割ったもの (商空間) の resolution を与えることに当たる。) つまり、$\mathcal{WC} \overset{\mu\times}{\mapsto} \mathcal{WC}$

注意:

(1)

$$\begin{aligned}
&\bar{X}_0^{-1} X_0^{-1} \\
=&\bar{X}_0^{-p} (\bar{X}_0^{p-1} X_0^{p-1}) \bar{X}_0^{-p} \\
=&\dots
\end{aligned}$$

のような計算をするため、正標数にしないと normal ordering を実行できない。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.230 要約

0.230. **定義へのリンク.** (書きかけである。)

定義 0.230.1. 基礎体 $\Bbbk$, 定義環 $\Bbbk_1, \Bbbk_2, \Bbbk_3$ の定義。

$\Bbbk$ は体。 $\Bbbk \subset \Bbbk_1 \subset \Bbbk_2 \subset \Bbbk_3$ である。ここで $\Bbbk_1 \ni h$. $\Bbbk_1$ は $h \to 0$ の議論を可能にするために用いられる。他方 $\Bbbk_2 = \Bbbk_1[k]$, $\Bbbk_3 = \Bbbk_1[k, C]$ は本質的なものではなく、書く字数を若干楽にするために補助的に用いる。

定義 0.230.2. 斉次 Weyl 代数 (WC) の定義. 2.20.1 の定義 (**??**) を見よ。

---
k の扱いについて。

この節では、 k を"ファイバー側" の変数として取り扱う。つまり、$\mathcal{WC}[k]$ を $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)_{\Bbbk_1}$ 上の層とみなし、その構造について議論する。

0.230. $\widetilde{\Omega}$ **の取扱。.** $\Omega, \tilde{\Omega}$ の定義は 2.22.1 にある。ただし、k をカウントしておかないと $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ の作用で閉じないので、$\Omega[k]$, $\widetilde{\Omega[k]}$ という記号を併用して k の存在をあからさまにすることにする。

$\bar{\mathfrak{d}}$-complex $(\widetilde{\Omega[k]}, \bar{\mathfrak{d}})$ は次の補題によって簡易化できる。

命題 0.230.1. $\bar{\mathfrak{d}}$-complex $(\widetilde{\Omega[k]}, \bar{\mathfrak{d}})$ は $(\Omega, 0)$ と quasi isomorphic である。つまり $D^+(\mathrm{Qcoh}(\mathbb{P}^n))$ の object として同型である。ただし、ここの Ω は $(\Omega[k])/(k)$ と同一視したものを

$$\Omega[k] = \Omega \oplus k\Omega[k]$$

という直和分解することで $\widetilde{\Omega[k]}$ の subsheaf と考えたものである。

Proof. $x = f + (\partial \log X_0)g$ に対して、$\bar{\mathfrak{d}}x = -kg$. ゆえに、$\widetilde{\Omega[k]}$ の $\bar{\mathfrak{d}}$-cocycle は Ω で、$\bar{\mathfrak{d}}$-coboundary は $k\Omega$ である。

□

WC のなかで X, E (無印、左) 変数だけ、あるいは $\bar{X}, \bar{E}$ (bar, 右) 変数だけ考えると super 可換な環をなし、それぞれ $\mathbb{P}^n$ 上の層 $\tilde{\Omega}, \tilde{\bar{\Omega}}$ を与える。言い換えると、WC に「左変数は左から、右変数は右から」作用させることにより $\tilde{\Omega}^\bullet \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}^\bullet$ の作用を持つような $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の加群の層 $\mathcal{WC}$ があたえられる。$\mathcal{WC}$ へのこの作用をステレオ作用、$\mathcal{WC}$ 自身のようにステレオ作用をもつ加群をステレオ加群と呼ぶことにする (2.22)。

定義 0.230.2. $\alpha \in \Bbbk_2$ に対して、$\mu^{(\alpha)} = \alpha C - (\sum_i X_i \bar{X}_i + k \sum_i E_i \bar{E}_i)$ とおく。

$\mu^{(\alpha)}$ はステレオ作用と可換であり、$\mu^{(\alpha)}$ は $\mathcal{WC}$ のイデアルを生成する。もう少し詳しく言うと、$\mathcal{WC}(-1, -1) \cdot \mu^{(\alpha)}$ は $\mathcal{WC}$ のイデアルである。

定義 0.230.3 (2.25)**.**

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{WC}/(\mu^{(k)}) \\ \mathfrak{A} &= \mathcal{WC}/(\mu^{(k)}, \sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1}C^p)) \\ \mathfrak{WC} &= \mathcal{WC}/(\sum_i X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1}C^p))\end{aligned}$$

と定義する。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIV E KÄHLER MANIFOLD NO.250 要約

0.250. **主定理の陳述.** 以下では $\Omega^\bullet[\partial\log(X_U)]$ のことを面倒なときは $\widetilde{\Omega}^\bullet$ と書くことにする。(定義??)

定理 0.250.1. 前小節の仮定のもとで、斉次 Weyl-Clifford 環 WC は、ステレオ作用を経由して、$\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$ 上の quasi coherent sheaf $\mathcal{WC}$ を定義する。$\mathcal{WC}$ の quotient module として $\mathcal{A}$ が定義される。これらは $\mathfrak{d},\bar{\mathfrak{d}}$ を odd 微分として持つ doule complex でもある。

以下 $\Bbbk$ の標数 は $p>0$ であるとする。

(1) $\mathcal{WC},\mathcal{A}$ は $\mathcal{O}^{(p)}$ 上の代数の構造も持つ。それらの quotient algebra として $\mathfrak{A},\mathfrak{WC}$ が定義される。
(2) $\mathcal{WC},\mathcal{A},\mathfrak{A},\mathfrak{WC}$ は odd 微分 $\mathfrak{d},\bar{\mathfrak{d}}$ をもつ double complex である。
(3) ステレオ加群としては、$\mathcal{WC}\cong\bigoplus_{l\geq 0}\widetilde{\Omega^\bullet[k]}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]}\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]}\otimes(\mathcal{O}(-l,-l))$
(4) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex としては、$(\widetilde{\Omega^\bullet[k]},\bar{\mathfrak{d}})\cong(\widetilde{\Omega^\bullet[k]},-kI_0)$, $(\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]},\bar{\mathfrak{d}})\cong(\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet[k]},\bar{\partial})$. ただし I_0 は Euler vector field $\sum_i X_i d/dX_i$ との interior product.
(5) $\bar{\mathfrak{d}}$-hyper cohomology 群の層は以下のように与えられる。
(i) $\mathcal{WC}$ について。

$$(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}),\mathfrak{d})\cong(\Omega^\bullet,\partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}],0)$$
$$\overset{\mathfrak{d}-\text{q.i}}{\sim}(\bigoplus_{l\geq 0}(\Omega^\bullet_{\text{sparse}}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}],0)$$

とくに、

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}))\cong\Omega^\bullet_{\text{sparse}}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}]$$

$$\mathbb{R}^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}),\mathfrak{d})\cong\bigoplus_{l=0}^{\infty}H^\bullet(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n,\Omega^\bullet_{\text{sparse}}\otimes_{\mathcal{O}^{(p)}}\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}}(-lp,-lp))$$

(ii) $\mathcal{A}$ について。

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}),\mathfrak{d})\cong&(\Omega^\bullet,\partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)},0)\\&\oplus(\widetilde{\Omega}_{(k=0)},\partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}},0)\\\overset{\mathfrak{d}-\text{q.i}}{\sim}&(\Omega^\bullet_{\text{sparse}},0)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)},0)\\&\oplus(\widetilde{\Omega_{\text{sparse}}}_{(k=0)},0)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}},0)\end{aligned}$$

とくに、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}))\cong&\Omega^\bullet_{\text{sparse}}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)}\\&\oplus\widetilde{\Omega_{\text{sparse}}}_{(k=0)}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}))\cong&H^\bullet(\Omega^\bullet_{\text{sparse}}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)})\\&\oplus\bigoplus_{l=1}^{\infty}H^\bullet(\widetilde{\Omega_{\text{sparse}}}_{(k=0)}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}((\widetilde{\overline{\Omega}}^\bullet_{\text{sparse}})_{(k=0)})(-lp,-lp))\end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{WC}$, $\mathfrak{A}$ について。

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC})) \cong \mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A})) \cong \Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}(p)} (\tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})_{(k=0)}$$

$$\mathbb{R}^{\bullet}\Gamma(\mathcal{H}^{j}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC}), \mathfrak{d}) \cong \mathbb{R}^{\bullet}\Gamma(\mathcal{H}^{j}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A}), \mathfrak{d}) \cong H^{\bullet}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \otimes_{\mathcal{O}(p)} \tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})$$

(6) $\mathbf{d} = \mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}$ に関して、

$$\Gamma(\mathcal{WC}, \mathbf{d}) \overset{q.i}{\sim} \bigoplus_{l \geq 0}((\Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \otimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{\text{sparse}}[d\log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})(-lp, -lp)), 0)$$

ゆえに、

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{WC}, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l \geq 0}(\Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \otimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{\text{sparse}}[d\log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})(-lp, -lp))$$

$$\mathbb{R}^i\Gamma(\mathcal{WC}, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{R}^i\Gamma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^{\bullet}_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{\text{sparse}}[d\log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})](-lp, -lp))$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIV E KÄHLER MANIFOLD NO.260 要約

0.260. **主定理の証明.** (1)-(4) は今までの整理である。

全体を通じて、$\mathcal{F}_1 \boxtimes_? \mathcal{F}_2$ と書いているやつは $\pi_1^*\mathcal{F}_1 \otimes_? \pi_2^*\mathcal{F}_2$ のことである。大抵の場合係数環 ? は $\mathcal{O}^{(p)}$ であって、その場合は省略する。

さて、(5) を証明しよう。$\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}$ は derived category を経由するから、さしあたって derived category (graded $\mathfrak{d}$-complex からなる abel 圏の derived category) で考える。

(i)

$c_{U\bar{V}} = X_U^{-1} C \bar{X}_{\bar{V}}$ とおく。まずこの $c_{U\bar{V}}$ のさばき方を考えよう。直和分解

$$\text{(DS)} \qquad \mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l \geq 0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\Bbbk_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^l$$

の存在に注意する。

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{d}} c_{U\bar{V}}^l &= \bar{\mathfrak{d}}(X_0^{-l} C^l \bar{X}_0^{-l}) \\
&= X_0^{-l} C^l \cdot (-l) \bar{X}_0^{-l-1} \bar{E}_0) \\
&= -l X_0^{-l} C^l \bar{X}_0^{-l} X_0^{-1} E_0 \\
&= -l c_{U\bar{V}}^l (\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))
\end{aligned}$$

とくに $\bar{\mathfrak{d}}$ は直和分解 (DS) を保つ。

$\alpha = \alpha_1 + (\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_2$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c_{U\bar{V}}^l) = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 \\
&\quad - l(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_1 = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \bar{\mathfrak{d}}\alpha_1 = 0 \\ \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 = -l\alpha_1. \end{cases}
\end{aligned}$$

とくに、$l \neq 0 \pmod{p}$ ならば、

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c_{U\bar{V}}^l) = 0 \\
\Longrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{-1}{l} \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 \\
\Longrightarrow\ &\alpha c_{U\bar{V}}^l = (\frac{1}{l})(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_2) c_{U\bar{V}}^l \\
&\qquad = \bar{\mathfrak{d}}(\frac{1}{l} \alpha_2 c_{U\bar{V}}^l)
\end{aligned}$$

つまり、$l \neq 0 \pmod{p}$ の部分は $\bar{\mathfrak{d}}$ コホモロジーに関与しない。言い換えると、$\mathcal{WC}$ は $\bigoplus_{l>0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\Bbbk_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^{pl}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$-quasi isomorphic である。

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^{l} \overset{q.i.}{\sim} \bigoplus_{l=0}^{\infty} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_{U\bar{V}}^{pl}$$

右変数にDeligne-Illusie-Cartier理論を用いる。$(\widetilde{\bar{\Omega}[k]}, \bar{\partial}) \cong (\widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}, 0)$ (homological isom.) $\widetilde{\bar{\Omega}[k]}, \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}$ はどちらも $\mathcal{O}^{(p)}[k]$ 上flatであるから、それ自身のflat resolutionであり、ここに現れる $\otimes$ ($\boxtimes$ に隠れているが...) はじつは $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ であるとみなせる。(とくにderived categoryの枠内で処理できる。)

$$\mathcal{WC} \overset{q.i}{\sim} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}]$$

$\widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}$ は $\bar{\partial}$ が 0 に等しいcomplexであり、つまりは似たようなものの直和である。flatnessによりtensor積とcohomologyは交換できて、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}) &\cong \mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\widetilde{\Omega[k]}) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}] \\
&\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}] \\
&\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}[c_{U\bar{V}}^{p}] \\
&\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[c_{U\bar{V}}^{p}]
\end{aligned}$$

ただし、grをとった時点で k の上のcomplexへの作用は 0 と等しくなる。

(ii) $\mathcal{WC}/(kC-\mu_0) \overset{qi}{\sim} \mathrm{Cone}(\mathcal{WC}[1] \overset{kC-mu_0}{\to} \mathcal{WC})$ であり、$\mu_0 = \bar{\mathfrak{d}}(\mathfrak{d}(F))$ $F = \sum_i X_i \bar{X}_i)$ であるから、$\mathcal{WC}[1] \overset{kC-mu_0}{\to} \mathcal{WC})$ は $\mathcal{WC}[1] \overset{kC}{\to} \mathcal{WC})$ と $\bar{\partial}$-homotopic である。($\mathfrak{d}^2 = 0$ により、homotopy $\mathfrak{d}(F)$ は $\mathfrak{d}$ とsuper可換であることに注意。) よって、$\mathcal{WC}/(kC-\mu_0) \overset{qi}{\sim} \mathrm{Cone}(\mathcal{WC}[1] \overset{kC}{\to} \mathcal{WC}) \overset{qi}{\sim} \mathcal{WC}/(kC)$ である。つまり、$\mathcal{A}$ の代わりに $\mathcal{WC}/(kC)$ を考えて良い。localに言えば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{WC}/(kC) &\cong \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]} \oplus \bigoplus_{l>0} (\widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}/(k)) c_{U\bar{V}}^{l} \\
&\overset{qi}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}/(k) \oplus \bigoplus_{l>0} (\tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}_{\mathrm{sparse}}) c_{U\bar{V}}^{l} \\
&\overset{qi}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}/(k) \oplus \bigoplus_{l>0} (\tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}_{\mathrm{sparse}}) c_{U\bar{V}}^{l} \\
&\overset{qi}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}/(k) \oplus \bigoplus_{l>0} (\tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}_{\mathrm{sparse}}) c_{U\bar{V}}^{pl}
\end{aligned}$$

(iii)$\mathcal{A}$, WC に現れるsheafはすべて $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上flatであり、言い換えると $\otimes_{\mathcal{O}^{(p)}}$-acyclic である。したがって、全体に $\otimes(\mathit{something})$ してよく、

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}C &\overset{qi}{\sim} \bigoplus_{l\geq 0}(\Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})_{(k=0)}[c^p_{U\bar{V}}]) \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\mathcal{O}^{(p)}/(C^p - (1-h^{p-1})F^p)) \\ &\cong \Omega \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\tilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\text{sparse}})_{(k=0)}\end{aligned}$$

(iv) 同様にして、

$$\mathfrak{A} \overset{qi}{\sim} \Omega \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}/(k)$$

(6) は やはり Deligne-Illusie-Cartier 理論の結果である。
(7) は (6) からすぐに従う。
(8) d についても同様である。
$b_U = \partial \log(X_U))$, $\bar{b}_{\bar{V}} = \bar{\partial}\log(\bar{X}_0))$ と書く。$d(b_U + \bar{b}_{\bar{V}}) = 0$ に注意。
$\alpha \in \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes \widetilde{\bar{\Omega}[k]}$ に対して、

$$\alpha = \beta_0 + (b_U + \bar{b}_{\bar{V}})\beta_1$$

$(\beta_0, \beta_1 \in \Omega \boxtimes \bar{\Omega}[k, b_U])$ と書く。

$$\begin{aligned}d(\alpha c^l_{U\bar{V}}) =&(d\beta_0 - (b_U + \bar{b}_{\bar{V}})d\beta_1)c^l_{U\bar{V}} - l(b_U + \bar{b}_{\bar{V}})\beta_0 c^l_{U\bar{V}} \\ =&(d\beta_0)c^l_{U\bar{V}} + (b_U + \bar{b}_{\bar{V}})(-d\beta_1 - l\beta_0)c^l_{U\bar{V}}\end{aligned}$$

$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は (したがって その和の d も) $b_U, \bar{b}_{\bar{V}}$ の数を増やさない。よって、$(b_U + \bar{b}_{\bar{V}})$ の係数を比較することにより、次を得る。

$$d(\alpha c^l_{U\bar{V}}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d\beta_0 = 0 \\ d\beta_1 = -l\beta_0 \end{cases}$$

結局、$p|l$ であるような項以外は $c^l_{U\bar{V}}$ の項は d-コホモロジーに関与しない。

$p|l$ の場合には、$c^l_{U\bar{V}}$ は d-closed であり、$\alpha(k), \beta(k) \in \Omega \boxtimes \bar{\Omega}$ にたいして、

$$\begin{aligned}&d(b_U\alpha(k) + \beta(k)) = 0 \\ \Leftrightarrow&(-b_U d\alpha(k) + k\alpha(k) + d\beta(k) = 0 \\ \Leftrightarrow&\begin{cases} d\alpha(k) = 0 \\ k\alpha(k) + d\beta(k) = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

β の k に関する定数項以外は効かない。d-closed を d-exact で割ると、出てくるものは $\mathcal{H}(\Omega \boxtimes \bar{\Omega})$ と等しい。ここで、Deligne-Illusie-Cartier 理論を使えば、結論として次を得る:

$(\bigoplus_{l\geq 0} \Omega_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}(-pl, -pl), d)$ は $(\mathcal{WC}, d)$ と quasi isomorphic.

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.262
要約

0.262. 証明のヒント集.

0.262.1. c_x のサバキ方. $c_x = X_0^{-1} C \bar{X}_0^{-1}$.

(DS)
$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l \geq 0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\Bbbk_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_x^l$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{d}} c_x^l &= \bar{\mathfrak{d}}(X_0^{-l} C^l \bar{X}_0^{-l}) \\
&= X_0^{-l} C^l \cdot (-l) \bar{X}_0^{-l-1} \bar{E}_0) \\
&= -l X_0^{-l} C^l \bar{X}_0^{-l} X_0^{-1} E_0 \\
&= -l c_x^l (\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))
\end{aligned}$$

とくに $\bar{\mathfrak{d}}$ は 直和分解 (DS) を保つ。
$\alpha = \alpha_1 + (\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_2$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c_x^l) = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow &(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 \\
&\quad - l(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_1 = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \bar{\mathfrak{d}}\alpha_1 = 0 \\ \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 = -l\alpha_1. \end{cases}
\end{aligned}$$

とくに、$l \neq 0 \pmod{p}$ ならば、

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathfrak{d}}(\alpha c_x^l) = 0 \\
\Longrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{-1}{l} \bar{\mathfrak{d}}\alpha_2 \\
\Longrightarrow\ &\alpha c_x^l = (\frac{1}{l})(\bar{\partial} \log(\bar{X}_0))\alpha_2) c_x^l \\
&= \bar{\mathfrak{d}}(\frac{1}{l}\alpha_2 c_x^l)
\end{aligned}$$

つまり、$l \neq 0 \pmod{p}$ の部分は $\bar{\mathfrak{d}}$ コホモロジーに関与しない。言い換えると、$\mathcal{WC}$ は $\bigoplus_{l \geq 0} \widetilde{\Omega[k]} \boxtimes_{\Bbbk_1[k]} \widetilde{\bar{\Omega}[k]} c_x^{pl}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$-quasi isomorphic である。

0.262.2. *The element k.* 主に左辺の変数 (左の $\mathbb{P}^n$) について考える。
k は local には $\bar{\mathfrak{d}}$-exact である。

$$k = \bar{\partial} \log(X_0))$$

したがって、global にも $\bar{\mathfrak{d}}$-closed である (当然だが。)
しかし、k は global には $\bar{\mathfrak{d}}$-exact ではない。

Čech cohomology レベルで言えば、これは、k の積分 $\partial\log(X_0)$ の差異のなす $\{\partial\log(X_i/X_j)\}_{ij} = \{x_{ij}^{-1}\mathfrak{d}x_{ij}\}_{ij}$ という 1-form の Čech cocycle である。

0.262.3. *d-cohomology.* $b_0 = \partial\log(X_0))$, $\bar{b}_0 = \bar{\partial}\log(\bar{X}_0))$ と書く。

$$d(\alpha c_x^l) = (d\beta_0 - (b_0 + \bar{b}_0)d\beta_1)c_x^l - l(b_0 + \bar{b}_0)\beta_0 c_x^l$$

$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ (したがって その和の d も) は $b_0, \bar{b}_0$ の数を増やさない。よって、

$$d(\alpha c_x^l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d\beta_0 = 0 \\ d\beta_1 = -l\beta_0 \end{cases}$$

結局、$p|l$ の時以外は c_x^l の項は d-コホモロジーに関与しない。

$d(b_0\alpha(k) + \beta(k) = 0 \Leftrightarrow (-d\alpha(k) + k\alpha(k) + d\beta(k) = 0 \Leftrightarrow d\alpha(k) = 0$ and $k\alpha(k) + d\beta(k) = 0$.

β の k に関する定数項以外は効かない。d-closed を d-exact で割る $->\mathcal{H}(\Omega\bar{\Omega})$

結論: $(\bigoplus_{l\geq 0}\Omega_{\mathrm{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}(-pl, -pl), d)$ は $(\mathcal{WC}, d)$ と quasi isomorphic.

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.265
要約

0.265. **spectral sequence に関する補遺.** 本稿では本来「derived category の derived category」のようなものを使いたいところで、spectral sequence を使ってしのいでいる。この節では簡単に復習して、本稿で必要なことについてまとめておくことにする。

(あ) $\mathbb{R}F(M)$

$M \to I^\bullet$ なる injective resolution をとって、ここに functor F をかます。

$\mathbb{R}F(M) = (F(I^\bullet))_{d_1}$

なる derived functor を得る。そのコホモロジーは

$R^iF(M) = H^i_{d_1}(F(I^\bullet))$

である。

(い) $\mathbb{R}F(M^\bullet)$

ここから本番になる。 $M^\bullet \to I^{\bullet\bullet}$ を piece-wise injective resolution とする。その意味は、

(1) 各 i に対して、$I^{i,\bullet}$ は各 M^i の injective resolution.
(2) M の微分 $d = d_1$ も lift しておく。(up to homotopy で unique に存在。)
(3) d_1 と d_2 とは可換。(になるように選ぶ)

そのような ものの存在は homology 代数の教科書なら大抵載っているぐらいによく知られている。$M^\bullet \to \mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet})$ は quasi isom であり、そこに F をかまして

$\mathbb{R}F(M^\bullet) = (F(\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet})))$

を得る。そのコホモロジーは

$R^iF(M^\bullet) = H^i_{d_1}(F(\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet})))$

である。

(う) $RF(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$

$M^{\bullet\bullet} \to I^{\bullet\bullet\bullet}$

piece-wise injective resolution.

その意味は:

(1) 各 i, j について、$(I^{i,j,k}, d_3)_k$ は $M^{i,j}$ の injective resolution.
(2) d_1 と d_2 は反可換.
(3) d_1 や d_2 と d_3 も反可換。

◎ piece-wise injective resolution の作り方: 各 j に対して、$(M^{\bullet j}, \partial)$ を ∂-chain complex のなす category の object と見て、piece-wise injective resolution を計算。$\bar{\partial}$ の lift もして、

$(I^\bullet, \partial)^{j,\bullet}$ を作る。

$(\mathrm{Tot}_{12}(I^{\bullet\bullet\bullet})$: $(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$ の object wise injective resolution.

$\mathrm{Tot}_{123}(I^{\bullet\bullet\bullet})$: $(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$ と quasi isomorphic.

$F(\mathrm{Tot}_{123}(I^{\bullet\bullet\bullet})) = \mathbb{R}F(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$

$H^iF(\mathrm{Tot}_{123}(I^{\bullet\bullet\bullet})) = R^iF(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$

(え) $(M^{\bullet\bullet}) : (M, d_1)^\bullet$ と考える。つまり、d_1-graded module の d_2-chain complex と考える。

$(M^\bullet, d_1)^\bullet \to (I^\bullet, d_1)^{\bullet\bullet}$: piecewise injective resolution.

$(M^\bullet, d_1)$ の形のものの 間の map は、injective resolution の あいだの map に up to homotopy で unique に lift できる。

よって、 $H_{d_2}(I^{\bullet,\bullet,\bullet})$ は $H_{d_2}(M)$ の injective resolution と同じに取れる。

$R^iF(H_{d_2}(M)) \cong H^i(F(\mathrm{Tot}_{1,3}(H_{d_2}(I^{\bullet,\bullet\bullet})))) = H^i(\mathrm{Tot}_{1,3}(H_{d_2}(F(I^{\bullet,\bullet\bullet})))) = H^iH_{d_2}(\mathrm{Tot}_{1,3}(F(I^{\bullet,\bullet\bullet})))$

(う) と (え) から、$F\,\mathrm{Tot}_{1,3}(I^{\bullet,\bullet,\bullet})$ の H_{1+2} と H^1H_2 の 2 つに derived functor としての意味がつき、spectral sequence

$$E_2 = R^iF(H^j_{d_2}(M)) \implies E_\infty = R^{i+j}F(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet}))$$

が存在することがわかる。

0.266. **我々の spectral sequence.** $H^\bullet(\Omega^\bullet, \widetilde{\bar{\Omega}^\bullet})$ は $\Bbbk[L/L^{n+1}] \otimes \Bbbk[v_n]$ で、$2n$ 次元。

$M = R^\bullet\Gamma(\widetilde{\Omega \otimes \bar{\Omega}}, d)$ も

$0 \to \Bbbk_1[L] \to M \to \mathrm{Ker}(L + \bar{L}) \to 0:$ exact.

$\Bbbk_1[L]$ は (n+1) 次元。 $\mathrm{Ker}(L + \bar{L})$ は

$\mathrm{Ker} \to \Bbbk_1[L, \bar{L}] \to (L + \bar{L})\Bbbk_1[L, \bar{L}] \to 0$:exact

と

$0 \to (L + \bar{L})\Bbbk_1[L, \bar{L}] \to \Bbbk_1[L, \bar{L}] \xrightarrow{\text{引き算}} \Bbbk_1[L] \to 0:$ exact により、$2n$ 次元であることがわかり、

“spectral sequence” は退化している.

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIV E KÄHLER MANIFOLD NO.270
要約

0.270. **主定理の陳述 2. $\mathcal{B}$ の場合.** (書きかけである。statement もおそらくまだ正しくない。) 以下では $\Omega[\partial\log(X_U)]$ のことを面倒なときは $\tilde{\Omega}$ と書くことにする。(定義**??**)

定理 0.270.1. 前小節の仮定のもとで、次のことがなりたつ。

(1) ステレオ加群としては、$\mathcal{B} \cong \tilde{\Omega} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]} \bar{\tilde{\Omega}}$

(2) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex としては、$(\mathcal{B}, \bar{\mathfrak{d}}) \cong ((\widetilde{\Omega[k]}, -kI_0) \boxtimes_{\Bbbk_1[k]} (\bigoplus_{l=0}^{p-1} \widetilde{\bar{\Omega}[k]}, \bar{\partial}) \otimes \mathcal{O}(-l,-l), \bar{\partial})$. ただし I_0 は Euler vector field $\sum_i X_i d/dX_i$ との interior product. $\mathcal{O}(-l,-l)$ は $c^l_{U\bar{V}} = X_U^{-l} C^l \bar{X}_{\bar{V}}^{-l}$ を local section とするような sheaf.

(3)
$$(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{B}), \mathfrak{d}) \cong (\Omega, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}_{\text{sparse}}[k]}/(k), 0)$$
$$\overset{q.i.}{\sim} (\Omega_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}[\bar{\partial}\log(\bar{X}_{\bar{V}})]), 0)$$

とくに、
$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{B})) \cong (\Omega_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}[\bar{\partial}\log(\bar{X}_{\bar{V}})])$$

(4)
$$R^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j(\mathcal{B}, \bar{\mathfrak{d}}), \mathfrak{d}) \cong \bigoplus_{\substack{l\geq 0\\ j_1+j_2=j}} H^\bullet(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^{j_1}_{\text{sparse}} \otimes \bar{\tilde{\Omega}}^{j_2}_{\text{sparse}}$$

(5) $\mathbf{d} = \mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}$ に関して、
$$\Gamma(\mathcal{B}, \mathbf{d}) \overset{q.i}{\sim} ((\Omega_{\text{sparse}} \otimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})), 0)$$

ゆえに、
$$\mathcal{H}^i(\mathcal{B}, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l\geq 0} (\Omega_{\text{sparse}} \otimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}}))$$

$$R^i\Gamma(\mathcal{B}, \mathbf{d}) \cong R^i\Gamma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega_{\text{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\text{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})])$$

$\mathcal{B}$ についても同様の結論が成り立つ。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.272
要約

0.272. **証明のヒント集.** $\mathcal{B}$:flatness を用いる。

$\mathcal{A}$: homotopy 同値性を用いる。ここのところで $\mathcal{A}$ の (非可換な) 乗法が活躍する。$\mu_{(k,0)} = \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}(F) = [\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}(F)]_+$ であることが homotopy 同値の肝であり、それによる「積」も我々の (非可換な) 積なのであった。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.280
要約

0.280. **主定理の陳述 3. $\mathcal{A}$ の場合.** (書きかけである。statement もまだたぶん全く正しくない。) 以下では $\Omega[\partial\log(X_U)]$ のことを面倒なときは $\tilde{\Omega}$ と書くことにする。(定義??)

定理 0.280.1. 前小節の仮定のもとで、次のことがなりたつ。

(1) ステレオ加群としては、$\mathcal{A}\cong\tilde{\Omega}\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}[k]}\bar{\tilde{\Omega}}$

(2) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex としては、$(\mathcal{A},\bar{\mathfrak{d}})\cong((\widetilde{\Omega[k]},-kI_0)\boxtimes_{\Bbbk_1[k]}(\bigoplus_{l=0}^{p-1}\widetilde{\bar{\Omega}[k]},\bar{\partial})\otimes\mathcal{O}(-l,-l),\bar{\partial})$. ただし I_0 は Euler vector field $\sum_i X_i d/dX_i$ との interior product. $\mathcal{O}(-l,-l)$ は $c^l_{U\bar{V}}=X_U^{-l}C^l\bar{X}_{\bar{V}}^{-l}$ を local section とするような sheaf.

(3)

$$(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}),\mathfrak{d})\cong(\Omega,\partial)\boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}}(\widetilde{\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[k]}/(k),0)$$
$$\overset{q.i.}{\sim}(\Omega_{\mathrm{sparse}}\boxtimes\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[\bar{\partial}\log(\bar{X}_{\bar{V}})]),0)$$

とくに、

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}))\cong(\Omega_{\mathrm{sparse}}\boxtimes\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[\bar{\partial}\log(\bar{X}_{\bar{V}})])$$

(4)

$$R^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j(\mathcal{A},\bar{\mathfrak{d}}),\mathfrak{d})\cong\bigoplus_{\substack{l\geq 0\\ j_1+j_2=j}}H^\bullet(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n,\Omega^{j_1}_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\tilde{\Omega}}^{j_2}_{\mathrm{sparse}}$$

(5) $\mathbf{d}=\mathfrak{d}+\bar{\mathfrak{d}}$ に関して、

$$\Gamma(\mathcal{A},\mathbf{d})\overset{q.i}{\sim}((\Omega_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})),0)$$

ゆえに、

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{A},\mathbf{d})\cong\bigoplus_{l\geq 0}(\Omega_{\mathrm{sparse}}\otimes\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}}))$$

$$R^i\Gamma(\mathcal{A},\mathbf{d})\cong R^i\Gamma(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n,\Omega_{\mathrm{sparse}}\boxtimes\bar{\Omega}_{\mathrm{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_{\bar{V}})])$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIV E KÄHLER MANIFOLD NO.300 要約

0.300. **射影空間から一般の射影多様体へ.**

(1) $\mathcal{WC}/\mu\mathcal{WC}$ を考えたい。

$$0 \to \mathcal{WC} \overset{\mu\times}{\to} \mathcal{WC} \to \mathcal{WC}/\mu\mathcal{WC} \to 0$$

を考えて、$\mathcal{WC}/\mu\,\mathrm{WC} \overset{qi}{\sim} \mathrm{Cone}[\mathcal{WC} \overset{\mu\times}{\to} \mathcal{WC}]$ により、Cone の話に移行。

(2) Cone は "$\mu\times$" の homotopy 類にしかよらないから、μ を簡単なものと置き換えても本稿で考えるような cohomology は変わらない。$\mu_0 = \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}(\sum_i X_i\bar{X}_i)$ に注意。

(1) locally free resolution の考えを用いて、variety に移行。$\mathcal{WC}\otimes$ /(something)^p を考える。$\mathcal{WC}$ の解析に現れる諸々の sheaf は $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上 flat であるため、$\otimes$ は $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ とみなすことができ、$\mathcal{WC}$/somthing^p はそれ自身の resolution と見ることができる。すなわち、$R^i\Gamma(\mathcal{H}^j(\mathcal{WC}/\mathrm{something})$ は可換理論ですぐさま計算可能。

(2) そもそも $\sum X_i^p\bar{X}_i^p = ...$ に移行。

(3) C で割る。/ kC で割る。 / μ で割る。

(4) 割って 割ったものを resolution.

(5) $\mathrm{Cone}[\mathcal{WC} \overset{C\times\mathrm{etc}}{\to} \mathcal{WC}]$ を執り行う。

(6) $\mathrm{Cone}[\mathcal{WC} \overset{C\times}{\to} \mathcal{WC}]$ は $\mathrm{Cone}[\mathcal{WC} \overset{(C+\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}F)\times}{\longrightarrow} \mathcal{WC}]$ と homotopy 同値。ゆえ、cohomology 的には同じ。

(7) まだ kC で割る分をあんまり考えていない。

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIV E KÄHLER MANIFOLD NO.340 要約

0.340. **主定理の陳述 (Y バージョン).** 編集中につき、間違い多し。

定理 0.340.1. 前小節の仮定のもとで、以下 $\Bbbk$ の標数 は $p > 0$ であるとする。

(1) $\mathcal{WC}_Y, \mathcal{A}_Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{WC}_Y$ は odd 微分 $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ をもつ double complex である。

(2) ステレオ加群としては、$\mathcal{WC}_Y \cong \bigoplus_{l\geq 0} \widetilde{\Omega^\bullet_Y[k]} \boxtimes_{\mathcal{O}_Y^{(p)}[k]} \widetilde{\overline{\Omega}^\bullet_Y[k]} \otimes (\mathcal{O}_Y(-l,-l))$

(3) $\bar{\mathfrak{d}}$-complex としては、$(\widetilde{\Omega^\bullet_Y[k]}, \bar{\mathfrak{d}}) \cong (\widetilde{\Omega^\bullet_Y[k]}, -kI_0)$, $(\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet_Y[k]}, \bar{\mathfrak{d}}) \cong (\widetilde{\overline{\Omega}^\bullet_Y[k]}, \bar{\partial})$. ただし I_0 は Euler vector field $\sum_i X_i d/dX_i$ (を Y の cone に制限したもの) との interior product.

(4) $\bar{\mathfrak{d}}$-hyper cohomology 群の層は以下のように与えられる。

(i) $\mathcal{WC}_Y$ について。

$$(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}_Y), \mathfrak{d}) \cong (\Omega^\bullet_Y, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}_Y^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}], 0)$$
$$\overset{\mathfrak{d}-\mathrm{q.i}}{\sim} (\bigoplus_{l\geq 0}(\Omega^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}_Y^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}], 0)$$

とくに、

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}_Y)) \cong \Omega^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}_Y^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}})_{(k=0)}[C^p_{U\bar{V}}]$$

$$\mathbb{R}^\bullet\Gamma(\mathcal{H}^j_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{WC}_Y), \mathfrak{d}) \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} H^\bullet(Y\times Y, \Omega^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}}(-lp,-lp))$$

(ii) $\mathcal{A}_Y$ について。

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}_Y), \mathfrak{d}) \cong &(\Omega^\bullet, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}, 0)\\ &\oplus (\widetilde{\Omega}_{(k=0)}, \partial) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}, 0)\\ \overset{\mathfrak{d}-\mathrm{q.i}}{\sim}&(\Omega^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}}, 0) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}, 0)\\ &\oplus (\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)}, 0) \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}, 0)\end{aligned}$$

とくに、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}_Y)) \cong &\Omega^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}\\ &\oplus \widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})[C^p_{U\bar{V}}]C^p_{U\bar{V}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathcal{A}_Y)) \cong &H^\bullet(\Omega^\bullet_{Y,\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})\\ &\oplus \bigoplus_{l=1}^{\infty} H^\bullet(\widetilde{\Omega_{\mathrm{sparse}}}_{(k=0)} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} ((\widetilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)})(-lp,-lp))\end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{WC}_Y$, $\mathfrak{A}_Y$ について。

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC}_Y)) \cong \mathcal{H}_{\mathfrak{d}}(\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A}_Y)) \cong \Omega^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}} \boxtimes_{\mathcal{O}^{(p)}} (\widetilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{\mathrm{sparse}})_{(k=0)}$$

$$\mathbb{R}^{\bullet}\Gamma(\mathcal{H}^{j}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{WC}_Y), \mathfrak{d}) \cong \mathbb{R}^{\bullet}\Gamma(\mathcal{H}^{j}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A}_Y), \mathfrak{d}) \cong H^{\bullet}(Y \times Y, \Omega^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \widetilde{\bar{\Omega}}^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}})$$

(5) $\mathbf{d} = \mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{d}}$ に関して、

$$\Gamma(\mathcal{WC}_Y, \mathbf{d}) \overset{q.i}{\simeq} \bigoplus_{l \geq 0} ((\Omega^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}} \otimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})(-lp, -lp)), 0)$$

ゆえに、

$$\mathcal{H}^{i}(\mathcal{WC}_Y, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l \geq 0} (\Omega^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}} \otimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})(-lp, -lp))$$

$$\mathbb{R}^{i}\Gamma(\mathcal{WC}_Y, \mathbf{d}) \cong \bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{R}^{i}\Gamma(Y \times Y, \Omega^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}} \boxtimes \bar{\Omega}^{\bullet}_{Y,\mathrm{sparse}}[d \log(X_U \bar{X}_{\bar{V}})](-lp, -lp))$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.500 要約

0.500. **公式.**

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij} \quad \text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i, \bar{X}_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0. \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

C は中心的元である。

$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \qquad [E_i, E_j]_+ = 0$$

$$(X_i\bar{X}_i)^p - (hC)^{p-1}X_i\bar{X}_i = X_i^p\bar{X}_i^p \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$(E_i\bar{E}_i)^2 = -(khC)E_i\bar{E}_i = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$(E_i\bar{E}_i)^p - (khC)^{p-1}E_i\bar{E}_i = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$(k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i)^p - (khC)^{p-1}(k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i) = k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p$$

$\mu_{(k,0)} \overset{\text{def}}{=} (k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i)$ とおくと、

$$\mu_{(k,0)}^p - (khC)^{p-1}\mu_{(k,0)} = \sum_i k^p X_i^p\bar{X}_i^p.$$

0.501. **特別な元.** 次の元は本文中に何度も現れる。

$\varepsilon = \mathfrak{d}\sum_i X_i\bar{X}_i = \sum_i \bar{X}_iE_i$
$\bar{\varepsilon} = \bar{\mathfrak{d}}\sum_i X_i\bar{X}_i = \sum_i X_i\bar{E}_i$
$\mathfrak{d} = \frac{1}{hC}\operatorname{ad}\varepsilon$
$\bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{hC}\operatorname{ad}\bar{\varepsilon}$

$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は odd な微分作用素であり、生成元への作用は次のように与えられる。

$\bullet$	k	X_i	$\mathfrak{d}X_i$	$\bar{X}_i$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$
$\mathfrak{d}\bullet$	0	$\mathfrak{d}X_i$	0	0	$k\bar{X}_i$
$\bar{\mathfrak{d}}\bullet$	0	0	$-kX_i$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$	0

μ_0, μ_1 を次のように定義する。

$$\mu_0 = \mu_{(k,0)} = k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i$$

$$\mu_1 = k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i - C$$

$\mu_0^p - (khC)^{p-1}\mu_0 = k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p.$
$\prod_{j=0}^{p-1}(\mu_0 - jkhC) = k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p$

$\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}\sum_i X_i\bar{X}_i = k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i = \mu_0$

$[\mu_0, \bar{X}_0] = [X_0\bar{X}_0, \bar{X}_0] = [X_0, \bar{X}_0]\bar{X}_0 = -Ch$ ゆえ、

$$\mu_0\bar{X}_0 = \bar{X}_0(\mu_0 - Ch)$$

一般の一変数関数 f に対して

$$f(\mu_0)\bar{X}_0 = \bar{X}_0(\mu_0 - Ch)$$

故に一般の整数 s に対して、

$$f(\mu_0)\bar{X}_0^s = \bar{X}_0^s(\mu_0 - sCh)$$

$$x_i \overset{\text{def}}{=} X_iX_0^{-1} = X_0^{-1}X_i, \quad x_i' \overset{\text{def}}{=} X_0\bar{X}_i, \quad e_i \overset{\text{def}}{=} E_iX_0^{-1} = X_0^{-1}E_i, \quad e_i' \overset{\text{def}}{=} X_0\bar{E}_i = \bar{E}_iX_0.$$

$$\bar{x}_i = \bar{X}_i\bar{X}_0^{-1} = \bar{X}_0^{-1}\bar{X}_i = (x_0')^{-1}x_i', \quad \bar{e}_i = \bar{E}_i\bar{X}_0^{-1} = \bar{X}_0^{-1}\bar{E}_i = (x_0')^{-1}e_i'.$$

NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.510
要約

0.510. **公式 (有限の場合).**

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij} \quad \text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i, \bar{X}_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0. \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

C は中心的元である。

$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \qquad [E_i, E_j]_+ = 0$$

$$(X_i\bar{X}_i)^p - (hC)^{p-1}X_i\bar{X}_i = X_i^p\bar{X}_i^p \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$(E_i\bar{E}_i)^2 = -(khC)E_i\bar{E}_i = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$(E_i\bar{E}_i)^p - (khC)^{p-1}E_i\bar{E}_i = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$(k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i)^p+(khC)^{p-1}(k\sum_i X_i\bar{X}_i+\sum_i E_i\bar{E}_i) = k^p\sum_i X_i^p\bar{X}_i^p$$

$\mu_{(k,0)} \overset{\text{def}}{=} (k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i)$ とおくと、

$$\mu_{(k,0)}^p + (khC)^{p-1}\mu_{(k,0)} = \sum_i k^pX_i^p\bar{X}_i^p.$$

0.510.1. 特別な元. 次の元は本文中に何度も現れる。
$\varepsilon = \mathfrak{d}\sum_i X_i\bar{X}_i = \sum_i \bar{X}_iE_i$
$\bar{\varepsilon} = \bar{\mathfrak{d}}\sum_i X_i\bar{X}_i = \sum_i X_i\bar{E}_i$
$\mathfrak{d} = \frac{1}{hC}\operatorname{ad}\varepsilon$
$\bar{\mathfrak{d}} = -\frac{1}{hC}\operatorname{ad}\bar{\varepsilon}$
$\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ は odd な微分作用素であり、生成元への作用は次のように与えられる。

$\bullet$	k	X_i	$\mathfrak{d}X_i$	$\bar{X}_i$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$
$\mathfrak{d}\bullet$	0	$\mathfrak{d}X_i$	0	0	$k\bar{X}_i$
$\bar{\mathfrak{d}}\bullet$	0	0	$-kX_i$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{X}_i$	0

有限の場合

以下、書きかけの部分が多い。
μ, μ_0, μ_1 を次のように定義する。

$$\mu = \mu_0 = \sum_i X_i\bar{X}_i + \frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i$$

$$\mu_1 = \sum_i X_i\bar{X}_i + \frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i - C$$

$\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}\sum_i X_i\bar{X}_i = k\sum_i X_i\bar{X}_i + \sum_i E_i\bar{E}_i = k\mu_0$

0.510.2. *The element m.* Let us put $m = RC - \sum X_i\bar{X}_i$. It plays an important role in our calculation.

0.510.3. *$m^{[l]}$, the falling factorial power of m.* For any non-negative integer l, we denote by $m^{[l]}$ the following "generalized factorial power of m":

$$m^{[l]} = m(m - Ch)(m - 2Ch)\dots(m - (l-1)Ch).$$

0.510.4. *formula of m.* In this section, we do some calculations on m needed for our later use. The result is summarized in the following lemma.

補題 0.510.1. We have:

(1) $\bar{\mathfrak{d}}m = -\varepsilon'$.
(2) $[m, \varepsilon'] = -Ch\varepsilon'$.
(3) $m\varepsilon' = \varepsilon'(m - Ch)$.
(4) $\bar{\mathfrak{d}}(m^{[l]}) = -lm^{[l-1]}\varepsilon'$ $(l = 0, 1, 2, 3, \dots)$.

Proof. (1) Knowing that $m = \frac{1}{k}\sum E_iE_i'$, we have

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{d}}m =& \frac{1}{k}\sum_i(-kX_iE_i') \\ =& -\sum_i X_iE_i' \\ =& -\varepsilon'.\end{aligned}$$

□

(2):

$$\begin{aligned}[m, \varepsilon'] =& \frac{1}{k}([\sum_i E_i\bar{E}_i, \varepsilon'] \\ =& -\frac{1}{k}\sum_i[E_i, \varepsilon']\bar{E}_i \\ =& -\frac{1}{k}\sum_i ChkX_i\bar{E}_i \\ =& -Ch\varepsilon'\end{aligned}$$

(3) is a trivial consequence of (2).
(4): Induction in l. The case $l = 0$ is trivial. The case $l = 1$ is treated in (1).

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{d}}m^{[l]} =& \bar{\mathfrak{d}}(m^{[l-1]}(m - (l-1)Ch)) \\ =& \bar{\mathfrak{d}}(m^{[l-1]}) \cdot (m - (l-1)Ch) + m^{[l-1]}\bar{\mathfrak{d}}m && \text{(Leibniz rule)} \\ =& -(l-1)m^{[l-2]}\varepsilon' \cdot (m - (l-1)Ch) - m^{[l-1]}\varepsilon' && \text{(Induction hypothesis).} \\ =& -(l-1)m^{[l-2]} \cdot (m - (l-2)Ch)\varepsilon' - m^{[l-1]}\varepsilon' && \bigl(\text{Consequence of (3)}\bigr). \\ =& -(l-1)m^{[l-1]}\varepsilon' - m^{[l-1]}\varepsilon' && \bigl(\text{by definition of } m^{[\bullet]}\bigr) \\ =& -lm^{[l-1]}\varepsilon'\end{aligned}$$

0.510.5. C, x_0'.

$$\begin{aligned} X_j\bar{X}_j =& X_0^{-1}X_j\bar{X}_0^{-1}\bar{X}_j\bar{X}_0X_0 \\ &= x_j\bar{x}_j\bar{X}_0X_0 = x_j\bar{x}_j(X_0\bar{X}_0 + hC) \end{aligned}$$

同様に:

$$E_j\bar{E}_j = e_j\bar{e}_j(X_0\bar{X}_0 + hC).$$

$$\begin{aligned} C &= \sum_i X_i\bar{X}_i + \frac{1}{k}\sum_i E_i\bar{E}_i \\ &= X_0\bar{X}_0 + (\sum_j x_j\bar{x}_j + \frac{1}{k}\sum_i e_i\bar{e}_i)\bar{X}_0X_0 \\ &= X_0\bar{X}_0 + (\sum_j x_j\bar{x}_j + \frac{1}{k}\sum_i e_i\bar{e}_i)(X_0\bar{X}_0 + hC) \end{aligned}$$

$$x_i \stackrel{\text{def}}{=} X_iX_0^{-1} = X_0^{-1}X_i, \quad x_i' \stackrel{\text{def}}{=} X_0\bar{X}_i, \quad e_i \stackrel{\text{def}}{=} E_iX_0^{-1} = X_0^{-1}E_i, \quad e_i' \stackrel{\text{def}}{=} X_0\bar{E}_i = \bar{E}_iX_0.$$

$$\bar{x}_i = \bar{X}_i\bar{X}_0^{-1} = \bar{X}_0^{-1}\bar{X}_i = (x_0')^{-1}x_i', \quad \bar{e}_i = \bar{E}_i\bar{X}_0^{-1} = \bar{X}_0^{-1}\bar{E}_i = (x_0')^{-1}e_i'.$$

0.510.6. 微分.

$$(\mathrm{WC}_0\,/(\mu_1))_0) = \Bbbk_1\langle k, x_{\mathbb{j}}, \mathfrak{d}x_{\mathbb{j}}, e_0, \omega_0, \bar{e}_0, \bar{\mathfrak{d}}x_{\mathbb{j}}, x_{\mathbb{j}}\rangle$$

$$\omega_0 = \frac{1}{k}\sum_i e_i\bar{e}_i = \frac{1}{k}\left(e_0\bar{e}_0 + \sum_j (x_je_0 + \mathfrak{d}x_j)(\bar{x}_j\bar{e}_0 + \bar{\mathfrak{d}}\bar{x}_j)\right)$$

$\bullet$	k	x_j	$\mathfrak{d}x_j$	e_0	ω_0	$\bar{e}_0$	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{x}_j$	$\bar{x}_j$
$\bar{\mathfrak{d}}\bullet$	0	0	0	$-k$	0	0	0	$\bar{\mathfrak{d}}\bar{x}_j$

$\mathfrak{d}x_i = (\mathfrak{d}X_i)X_0^{-1} - X_iX_0^{-2}\mathfrak{d}X_0 = e_i - x_ie_0$
$e_i = \mathfrak{d}x_i + x_ie_0$