微分積分学基礎 NO.7 要約

今日のテーマ:**ロピタルの定理など**
次のことが必要である。(先週に似たような議論)

定理 7.1 (コーシーの平均値の定理)**.** $[a,b]$ を含む開区間上で微分可能な関数 f,g が与えられているとし、$x\in(a,b]$ に対して $g(x)\neq g(a)$ と仮定する。このとき、ある $c\in[a,b]$ が存在して、$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす。

証明のアイディア: $l=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ とおき、$F(x)=(f(x)-f(a))-l(g(x)-g(a))$ に平均値の定理を用いる。

本題はこちら:

定理 7.2 (ロピタル)**.** 実数 a の近くで定義されて、微分可能な関数 f,g があるとする。このとき、極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

が不定形であって、なおかつ

(1) 極限

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在し、

(2) a を含むある開区間から a を除いた点において $g'(x)\neq 0$ が成り立つとする。

このとき、前者の極限も存在して A と等しい。

◎ロピタルの定理は、$\frac{\infty}{\infty}$ の形の極限や、$a=\pm\infty$ のときの極限等でも同様のことが成り立つ。