微分積分学基礎 NO.10 要約

今日のテーマ:**積分**
積分にはいくつかのものがある。

(1) f の原始関数、すなわち微分して f に一致する関数を見つける。
(2) グラフの面積に当たる量、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ をもとめる。
(3) 定積分の積分区間を動かして $\int_a^x f(t)dt$ をもとめる。(不定積分)

定理 10.1. (a,b) 上の関数 f に対して、その原始関数 F,G が与えられたとする。このとき F と G の差は定数である。言い換えると、f の原始関数は $F+C$ (C は定数) の形である。(C のことを積分定数と呼ぶ。)

定義 10.2. 一変数関数 f に対して、f の原始関数のことを

$$\int f(x)dx + C$$

(もしくは $\int f dx + C$) とかく。

... のだが、教科書に従って、積分定数は省略して $\int f(x)dx$ と書くことが多い。
微分の表を逆に読めば、積分の表が得られる。

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathrm{Sin}^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Tan}^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Sin}^{-1}(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Tan}^{-1}(x)$

定義 10.3 (リーマン積分)**.** $[a,b]$ 上で定義された関数 f に対して、$[a,b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ と、分割された各区間での点 $a_k \in [x_{k-1}, x_k] (k = 1, 2, \ldots, n)$ をとる。そのとき、f のリーマン和を

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k)(x_k - x_{k-1})$$

で定める。分割を小さくすると、リーマン和が常に一定の値に近づくとき、その値のことを $\int_a^b f(x)dx$ と書き、f の $[a,b]$ における定積分と呼ぶ。

定理 10.4. f が $[a,b]$ で定義される連続関数ならば、f の定積分は必ず存在する。

証明のアイディア: f が $[a,b]$ で一様連続であることを $[a,b]$ のコンパクト性を利用して示し、利用する。
定積分はリーマン積分よりもさらに柔軟な定義があり (ルベーグ積分)、$[a,b]$ 上の考える限りの有界関数は、ルベーグ積分可能と見てよいぐらいである。

定理 10.5. $[a,b]$ 上の連続関数 f に対して、$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は f の原始関数を与える。