線形代数学 II NO.14 要約

今日のテーマ: 対称行列の標準形

定義 14.1. (1) 実行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称行列であるとは、${}^tA = A$ のときにいう。
(2) 複素行列 A がエルミート対称行列であるとは、${}^t\bar{A} = A$ のときにいう。ここで、$\bar{A}$ は A のそれぞれの成分の複素共役をとった行列を指す。

命題 14.2. エルミート対称行列の固有値は必ず実数である。とくに実対称行列の固有値は必ず実数である。

定義 14.3. n 次正方行列 P が直交行列 $\Leftrightarrow {}^tPP = E_n$.
n 次正方行列 P がユニタリ行列 $\Leftrightarrow {}^t\bar{P}P = E_n$.

定理 14.4. 実対称行列は直交行列で対角化できる。エルミート対称行列はユニタリ行列で対角化できる。

この定理のうち、エルミート行列の対角化には、複素ベクトル空間の計量の話が必要であるが、議論は同様なので結果だけ上に掲げておいた。

参考:

定義 14.5. 複素ベクトル空間 V が与えられているとする。$V \times V$ から $\mathbb{R}$ への正定値半対称双線形写像を V の**エルミート内積**と呼ぶ。具体的には次の条件を満たすものがエルミート内積である。

(1) $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \overline{\mathbb{b} \cdot \mathbb{a}} \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in V)$
(2) $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} + \mathbb{c}) = \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} + \mathbb{a} \cdot \mathbb{c} \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in V)$
(3) $(\mathbb{a} + \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} = \mathbb{a} \cdot \mathbb{c} + \mathbb{b} \cdot \mathbb{c} \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in V)$
(4) $(c\mathbb{a}) \cdot \mathbb{b} = \mathbb{a} \cdot (\bar{c}\mathbb{b}) = c(\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}) \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in V, \forall c \in \mathbb{R})$
(5) $\mathbb{a} \cdot \mathbb{a} \geq 0. \qquad \mathbb{a} \cdot \mathbb{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{a} = \mathbf{0}. \qquad (\forall \mathbb{a} \in V)$

エルミート内積を持つ複素ベクトル空間を **複素計量ベクトル空間** と呼ぶ。

複素計量ベクトル空間でも、シュミットの直交化法に代表されるような技法・定理が同様にある。