代数学 IA NO.4 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《$\mathbb{C}^\times$ の有限部分群》

始める前に、次のことは既知としておく。証明等は複素解析の講義を参照のこと。

(1) 複素数 z に対して、$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ と置くと、これは収束する。これを z の exponential とよぶ。
(2) $r \in \mathbb{R}$ なら、$\exp(r) = e^r$ (通常の指数関数。) このため一般の $z \in \mathbb{C}$ に対しても、$\exp(z)$ のことを e^z と表記することがある。
(3) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ に対して、 $\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$.
(4) $b \in \mathbb{R}$ に対して、$\exp(b\sqrt{-1}) = \cos(b) + \sqrt{-1}\sin(b)$.

命題 4.1. 正の整数 n を一つ固定し、$\zeta_n = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n})$ とおく。すると、

(1) ζ_n の (乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の元としての) 位数は n である。
(2) ζ_n の生成する $\mathbb{C}^\times$ の部分群は

$$\langle \zeta_n \rangle = \{\zeta_n^k; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

である。**この群を $\mu_n(\mathbb{C})$ と書く。**
(3) $\zeta_n^k = \zeta_n^l \Leftrightarrow k - l \in n\mathbb{Z}$.

注意 4.2. 幾何学的には、次のような意味がある。

(1) $\mu_n(\mathbb{C})$ の元を複素平面上にプロットするとちょうど正 n 角形の頂点に並ぶ。
(2) $\mu_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^\times$ の「回転」を表す群である。

一般にべき乗して 1 と等しくなるような元を、「1 のべき根」とよぶ。言い換えれば、1 のべき根とは、$\cup_{n=1}^{\infty} \mu_n(\mathbb{C})$ の元のことである。

定義 4.3. 元の数が有限であるような群を、**有限群**と言う。有限群 G の元の個数を、G の**位数**と言い、$|G|$ とか $\mathrm{ord}(G)$ で表す。

定義 4.4. 位数 n の巡回群は、本質的にはひとつしかない。この群を C_n と書く。

C_n は群としては $\mu_n(\mathbb{C})$ と同じものであるが、$\mu_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ の部分集合であるのに対して。C_n はそうだとは考えていない、ただの抽象的な群であるというところが異なる。

C_n を書き表し方はいろいろあるのだが、ここでは、「生成元と関係式」を書く次の表記を採用する。

$$C_n = \langle a; a^n = e \rangle.$$

群の元 x の位数とは、$x^k = e$ を満たす正の整数 k のうち最小のものであったことを思い出そう。元の位数と群の位数とには明快な関係がある。詳しくは次回。

例題 4.5. 位数 12 の巡回群 $C_{12} = \langle a; a^{12} = e \rangle$ の元をすべて書き、その位数を表にせよ。

答:

元	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
位数	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12