代数学 IA NO.8 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《二面体群・正規部分群》

$\zeta_n = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n})$ とおく。複素平面からそれ自身への全単射のうち、

(1) 「ζ_n 倍する写像」を a とおく。すなわち、

$$a(z) = \zeta_n z.$$

(2) 「複素共役を取るという写像」を b とおく。すなわち、

$$b(z) = \bar{z}.$$

(3) a, b で生成される群を二面体群といい、$\mathbb{D}_n$ と書く。

$\mathbb{D}_n$ を書き表すにはいくつか方法がある。
◎生成元と関係式による表示。

命題 8.1. 二面体群 $\mathbb{D}_n$ と、上のように決まった a, b について、

(1) $a^n = e$ (単位元 ($\mathbb{C}$ の恒等写像)).
(2) $b^2 = e$.
(3) $bab^{-1} = a^{-1}$.
(4) $\mathbb{D}_n$ の元は $a^i b^j$ $(i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\},\ j \in \{0, 1\})$ と一意に書ける。特に、$\mathbb{D}_n$ の位数は $2n$ である。

$\mathbb{D}_n$ の群演算を書き下すには、$a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}$ があれば良いということが分かる。そのいみで、

$$\mathbb{D}_n = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

と書く。
◎ 置換としての表現

$$a \leftrightarrow (1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$$

$$b \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

という対応により $\mathbb{D}_n$ は $\mathfrak{S}_n$ の部分群とみなすことができる。
◎実行列としての表示。a, b はともに $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への実線形写像であることに着目する。

$$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}, \qquad b \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(但し $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$)

$\mathbb{D}_n$ は非可換な群である。一般に、非可換の群をその部分群で割る (クラス分けする) 際には左、右の別が必要である。

定義 8.2. 群 G の部分群 H が与えられているとする。このとき、$x, y \in G$ が H を法として左同値であるとは、

$$\exists h \in H \quad hx = g$$

のときにいう。これは同値関係を定義する。その同値類の集合を $H\backslash G$ と書く。

同様に、右同値、G/H が定義される。

$H\backslash G$ は集合の差の記号 $H \setminus G$ とよく似ているが、後者は空集合であるからまず使わない。すなわちちょっと考えれば区別がつく。

例 8.3. $\mathbb{D}_n$ の部分群として $H = \langle a \rangle$ を考える。左クラス分けは

$$\mathbb{D}_n = H \coprod Hb$$

右クラス分けは

$$\mathbb{D}_n = H \coprod bH$$

であり、２つのクラス分けは (実は) 一致する。

例 8.4. $\mathbb{D}_n$ の部分群として $K = \langle b \rangle$ を考える。左クラス分けは

$$\mathbb{D}_n = K \coprod Ka \coprod Ka^2 \coprod \cdots \coprod Ka^{n-1}$$

右クラス分けは

$$\mathbb{D}_n = K \coprod aK \coprod a^2K \coprod \cdots \coprod a^{n-1}K$$

であるが、2 つのクラス分けは一致しない。

定義 8.5. 群 G の部分群 H は、それによる左同値類と右同値類とが一致する場合に**正規部分群** であると呼ばれる。

命題 8.6. G の部分群 H が、$[G : H] = 2$ をみたすなら、H は G の正規部分群である。

命題 8.7. 群 G の部分群 H について、次の条件は同値である。

(1) H は G の正規部分群である。
(2) $\forall h \in H, \forall g \in G$ に対して、 $ghg^{-1} \subset H$. すわなち $\forall g \in G$ に対して $gHg^{-1} \subset H$.
(3) $\forall g \in G$ にたいして $gH = Hg$.

群 G の剰余類によるクラス分けは、もっと具体的な (例えば、幾何学的な) 意味をもつくことが多い。例えば $\mathbb{D}_n$ の 例で、

- $H = \langle a \rangle$ によるクラス分けは、「複素平面を裏返すか表のままか」をあらわす。
- $K = \langle b \rangle$ による右クラス分けは、($\mathbb{C}$ のそれ自身への変換と考えた時、「$1 \in \mathbb{C}$ をどの点に写すか」での分類である。
- K による左クラス分けは、「どの元が $1 \in \mathbb{C}$ に写るか」での分類である。