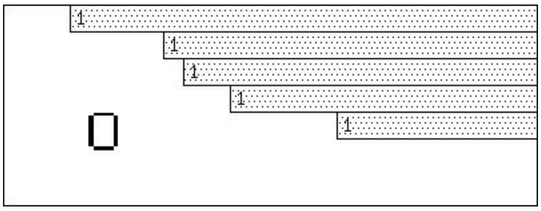
理工系線形代数学 NO.4 要約

今日のテーマ:**連立方程式の解法と行基本操作**

階段行列 C とは、次のような行列である。

- C の上から r 行までは
  - 各行は 0 が続き、そのあと 1 で始まる *。
  - 各行の 1 で始まる位置は、下段に行くほど右である。
- C のその後の行はずっと 0 がならぶ。

r のことを<u>階段行列 C の 階数</u>と呼ぶ。



↑階段行列のイメージ。白い部分はすべて成分が 0. グレーの部分は先頭が 1 で始まる *. そのあとは 0 を含めなんでもよい。ひっくり返すと階段っぽい (?) なお、 *のところ、教科書では、1 ではなく、「0 以外の定数 」で始まると書いてある。行基本変形が「行を定数倍すること」を含むため、本質的にはどちらでもよい。)

野暮な注意点を 2 つ一応書いておく:

- 最初の行は 0 から始まることも、1 から始まることもある。
- 各行の最初の 1 の下は、必ず 0 である。(階段の先頭が揃うことはない。)

A を行基本変形して階段行列 C に直すことができる。

行列の**行基本操作** とは

(1) 2 つの行を入れ替える。
(2) 特定のひとつの行に、別の行の定数倍を加える。
(3) 特定の一つの行を定数倍する。

という操作のことであった。

C の取り方、直し方はいろいろあるが、C の階数は A にしか依らない。これを A の**階数**と呼び、 $\mathrm{rank}(A)$ で書き表す。

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ において、A のことを係数行列、$[A\ \mathbb{b}]$ のことを拡大係数行列とよぶ。

階数を用いると、連立 1 次方程式の解法は次のように整理できる。

定理 4.1. (m, n)-行列 A と $(m, 1)$-行列 $\mathbb{b}$ *(m 次元列ベクトル)* が与えられているとする。$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A\ \mathbb{b}])$

さらに、解を持つときの解空間の次元は

$$n - \mathrm{rank}(A)$$

である。言い換えると、解はこれだけの「自由に動けるパラメータ」をもつ。