# 理工系線形代数学 NO.7 要約

今日のテーマ:**行列式 (2)**

**命題 7.1.** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。

**定義 7.2.** 行列 $A$ が与えられた時、その $i$ 行と $j$ 列を引っこ抜き, その行列式をとってついでに符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものを $A$ の余因子といい、$A_{ij}$ で書き表す。

**補題 7.3.** $A$ の 1 列目が基本列ベクトル $e_i$ に等しいならば、$\det(A) = A_{i1}$.

*(*もっと一般に、$A$ の $j$ 列目が $e_i$ に等しいならば、$\det(A) = A_{ij}$.*)*

**命題 7.4** (行列式の 1 行目に関する展開)**.** 任意の $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

が成り立つ。

上の命題と同様にして、2 行目、3 行目,... $n$ 行目に関する展開が得られる。$A$ を、「$A$ の 1 列目を $A$ の $k$ 列目に置き換えた行列」に置き換えることにより、つぎの結果を得ることができる。

**命題 7.5.** 任意の $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{1j} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

が成り立つ。

これもまた、1 行目だけについて特別に言えることではなく、結局次のことが言える:

**命題 7.6.** 任意の $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{mj} = \delta_{km} \det(A) \qquad (\forall k, \forall m \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

が成り立つ。

この式は次のことを意味している:

**命題 7.7.** 任意の $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、各 $ij$ 成分が $A$ の余因子 $A_{ji}$ であるような行列 *(*$i, j$ の順番に注意。*)* を $\tilde{A}$ と書くことにする。*(*$\tilde{A}$ のことを $A$ の余因子行列とよぶ。*)* このとき、

$$A\tilde{A} = \det(A)$$

**系 7.1.** $n$ 次正方行列 $A$ が逆行列を持つことと、$\det(A) \neq 0$ とは同値である。

**命題 7.8** (クラーメル)**.** $n$ 次正方行列 $A$ と $n$ 次元列ベクトル $\mathbb{b}$ に対して、$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ を満たす $n$ 次元列ベクトル $\mathbb{x}$ の第 $i$ 成分 $x_i$ は

$$\det(A) \cdot x_i = \det(A\rfloor_i \mathbb{b})$$

できまる。ただし、 $A\rfloor_i \mathbb{b}$ は $A$ の $i$ 番目の行ベクトルを $\mathbb{b}$ に置き換えて得られる行列である。( ここだけの記号。)