理工系線形代数学 NO.8 要約

今日のテーマ :**行列式 (3) 余因子と逆行列**今回は (2) のつづき。プリントの中身は (2) と同じなので、配布しない予定。

命題 8.1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。

定義 8.2. 行列 A が与えられた時、その i 行と j 列を引っこ抜き , その行列式をとってついでに符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものを A の余因子といい、 A_{ij} で書き表す。

補題 8.3. *A の 1 列目が基本列ベクトル e_i に等しいならば、$\det(A) = A_{i1}$. (もっと一般に、 A の j 列目が e_i に等しいならば、 $\det(A) = A_{ij}$.)*

命題 8.4. *(行列式の 1 行目に関する展開).* 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

が成り立つ。

上の命題と同様にして、 2 行目、 3 行目,. . . n 行目に関する展開が得られる。 上の命題の A を、「 A の 1 列目を A の k 列目に置き換えた行列 B 」に対して適用することにより、つぎの結果を得ることができる。

命題 8.5. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{1j} = 0 \quad (k = 2, ..., n)$$

が成り立つ。

これもまた、 1 行目だけについて特別に言えることではなく、結局次のことが言える :

命題 8.6. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{mj} = \delta_{km} \det(A) \quad (\forall k, \forall m \in 1, 2, ..., n)$$

が成り立つ。

この式は次のことを意味している :

命題 8.7. *(クラーメルの公式).* 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、各 ij 成分が A の余因子 A_{ji} であるような行列 *(i, j の順番に注意。)* を $\tilde{A}$ と書くことにする。 *($\tilde{A}$ のことを A の余因子行列とよぶ。)* このとき、

$$A\tilde{A} = \det(A) 1_n$$

系 8.1. n 次正方行列 A が逆行列を持つことと、 $\det(A) \neq 0$ とは同値である。