# 環論要約 NO.1

この講義の前半では、次の定理の証明を目標とする。

**定理 1.1** (環の準同型定理). 環 $R$ から別の環 $S$ への準同型写像 $\phi: R \to S$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\phi$ の像 $\mathrm{Image}\,\phi$ は $S$ の部分環である。
(2) $\phi$ の核 $I = \mathrm{Ker}\,\phi$ は $R$ のイデアルである。
(3) 剰余環 $R/I$ は $\mathrm{Image}\,\phi$ と同型である。

後半では、環や体の実例、とくに「一次元の環」について詳しく扱う。

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《環の定義・部分環の定義》
環とは、足し算、引き算と掛け算ができる集合のことである。
部分環とは、部分集合であって環になっているもののことである。

**定義 1.1** (環の定義). 集合 $R$ が**環**であるとは、足し算と呼ばれる写像

$$+: R \times R \to R$$

と掛け算と呼ばれる写像

$$\times: R \times R \to R$$

が定義されていて次の性質を満たす時に言う。

(1) $R$ は足し算に関して可換群をなす。
(2) $R$ の積は結合法則を満たす。
(3) $R$ の足し算と掛け算は分配法則を満たす。すなわち、任意の $a, b, c \in R$ に対して、次のことが成り立つ。

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c, \quad c \times (a+b) = c \times a + c \times b$$

(4) $R$ は積に関して単位元を持つ。すなわち、ある $u \in R$ が存在して、すべての $x \in R$ に対して、$xu = x$ かつ $ux = x$ が成り立つ。

(群論で習ったように、条件 (1) は言い換えれば、「$R$ の元は足し算、引き算がその中でできる」という意味である。

野球の選手を集めて野球チームをつくるように、数を集めて環を作ることができる。環を扱う諸君はさながらチームの監督である。「数」や「多項式」は歴史的な名プレーヤーである。これらについては普通の和、積については結合法則や分配法則等が自動的になりたっていることが多いのでそこはクドクド言う必要はない。

まずは「名門」チームの幾つかを知っておくべきであろう:

**例 1.1.** 次のものは通常の足し算、掛け算によって環になる。

(1) (重要) 整数全体のなす集合 $\mathbb{Z}$.
(2) 有理数全体のなす集合 $\mathbb{Q}$.
(3) 実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$.
(4) 複素数全体のなす集合 $\mathbb{C}$.
(5) 実数を成分として持つ 2 次の正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$.
(6) (重要) 実数上の一変数多項式全体のなす集合 $\mathbb{R}[X]$.

**補題 1.1.** 任意の環 $R$ に対して、次のことがなりたつ。
(1) $R$ の和に関する単位元は、ただ一つである。
(2) $R$ の積に関する単位元は、ただ一つである。

**証明**. (1) については、群論で学んだはずである。(ただし、(2) と同様の証明も可能である。)
(2) $R$ の単位元が (見掛け上) 二つあったとして、それらを $u, v$ とおくと

$$u \underset{(v\text{ は単位元})}{=} uv \underset{(u\text{ は単位元})}{=} v$$

すなわち、両者は実は等しい。 □

今後、環 $R$ の和に関する単位元を $0$ (時には $0_R$) と書き、$R$ の**零元**と呼ぶ。 また、環 $R$ の積に関する単位元を $1$ (時には $1_R$) と書き、単に 「$R$ の**単位元**」と言ったときにはこの $1$ のことをさす。

環の零元と、単位元は、野球の投手と捕手と言ったところか。

ときには、チームの中の一部分が、「特別遠征チーム」として戦わねばならないときもある:

**定義 1.2** (部分環の定義)**.** $R$ が単位元をもつ環であるとする。$R$ の部分集合 $S$ が $R$ の部分環であるとは、$S$ が次の条件を満たす時にいう。
(1) $S$ は $R$ の足し算、かけ算を流用することにより環になっている。
(2) $S$ は $R$ の単位元を元として含む。

**例 1.2.** 次のものは複素数全体のなす環 $\mathbb{C}$ の部分環である。
(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$.
(2) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$.
(3) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$.

数や行列などの、見知ったもの (名選手) を集めた集合 $S$ を作ったとする。それが環になるか否かの判定に重要なのは、$S$ には必要なメンバーが揃っているか、ということである。つまり $R$ のなかの元を足したり、引いたり、掛けたりしたときに $R$ のなかからはみ出す、ということがあってはならない。そこだけ押さえれば名選手たちなら最小限のことはしてくれる。

**例 1.3.** つぎのものは (通常の和、積について) 環ではない。
(1) $\{0, 1\}$.
(2) $0$ 以上の整数の集合 $\mathbb{N}$.
(3) (正のものも負のものもふくめた) すべての奇数の集合 $2\mathbb{Z} + 1$.
(4) 虚部が整数であるような複素数の全体 $\mathbb{R} + \sqrt{-1}\mathbb{Z}$.

**問題 1.1.** $\frac{1}{2}$ の整数倍をすべて集めた集合

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{n}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$$

は (通常の和、積について) 環ではないことを示しなさい。